លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ

បរិញ្ញាបត្រផ្នែកគណិតវិទ្យា

សិក្សាគណិតវិទ្យាដោយខ្លួនឯង

ចំនួនកុំផ្លិច

សម្រាប់ថ្នាក់ទី ១០_១១

សិស្សពូកែ និង អាហារូបករណ៍

$$(a+i.b)(c+i.d)=(ac-bd)+i.(ad+bc)$$

គណៈកម្មការនិពន្ធនិងរៀបរៀង

លោក លឹម ផល្គុន និង លោក សែន ពិសិដ្ឋ

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យ

លោក លឹម ឆុន	លោក អ៊ុំង សំណាង
លោក ឆិត្យ ម៉េង	អ្នកស្រី ឌុយ រីណា
លោក ព្រឹម សុនិត្យ	លោក ផល ម៉ុនឆាយ
លោក លោក នន់ សុខណា	

អ្នកត្រួតពិនិត្យអក្ខរាវិរុទ្ធ

លោក លឹម មិគ្គសិរ

ការិកុំព្យូទ័រ	**អ្នករចនាក្រប**
កញ្ញា លី គុណ្ណាកា	លោក លឹម ផល្គុន

អារម្ភកថា

សៀវភៅ **សិក្សាគណិតវិទ្យាដោយខ្លួនឯង** ផ្នែក **ចំនួនកុំផ្លិច** ដែលអ្នកសិក្សាកំពុងកាន់សិក្សានៅក្នុងដៃនេះ យើងខ្ញុំបានខិតខំស្រាវជ្រាវចងក្រងឡើង ក្នុងគោលបំណងទុកជាឯកសា សិក្សាបន្ថែមលើមេរៀនចំនួនកុំផ្លិចដោយខ្លួនឯង ។ នៅក្នុងសៀវភៅនេះរួមមានបីជំពូកគឺ ជំពូកទី១ មេរៀនសង្ខេបភ្ជាប់ជាមួយឧទាហរណ៏គំរូ ជំពូកទី២ លំហាត់ជ្រើសរើសនិងដំណោះស្រាយ និង ជំពូកទី៣ ជាលំហាត់អនុវត្តន៏ ។

សៀវភៅនេះមិនល្អហួសគេ ហួសឯងនោះទេ កំហុសដោយអចេតនាប្រាកដជាមាន អាស្រ័យហេតុនេះ យើងខ្ញុំជាអ្នកនិពន្ធ និង រៀបរៀង រងចាំជានិច្ចនូវមតិរិះគន់ពីសំណាក់ អ្នកសិក្សាក្នុងគ្រប់មជ្ឈដ្ឋានដោយក្ដីរីករាយ ដើម្បីកែលំអសៀវភៅនេះឱ្យកាន់តែមាន សុក្រិត្យភាពបន្ថែមទៀត ។

ជាទីបញ្ចប់យើងខ្ញុំសូមជូនពរចំពោះអ្នកសិក្សាទាំងអស់ជួបតែសុភមង្គល សុខភាពល្អ និងទទួលជ័យជំនះក្នុងការសិក្សា និង មុខរបរការងារ គ្រប់ពេលវេលា ។

បាត់ដំបងថ្ងៃទី ២៨ មីនា ២០១១

អ្នកនិពន្ធ លឹម ផល្គុន

Tel : 017 768 246

www.mathtoday.wordpres.com

លឹម ផល្លុន និង សែន ពិសិដ្ឋ

សិក្សាគណិតវិទ្យាដោយខ្លួនឯង

ចំនួនកុំផ្លិច

មាតិការឿង

ទំព័រ

ជំពូកទី១

ជំពូកទី២

ជំពូកទី៣

ជំពូកទី១

ចំនួនកុំផ្លិច

១_និយមន័យ

ក. ចំនួននិម្មិត

ផលគុណនៃចំនួនពិត $\mathbf{c}$ ខុសពីសូន្យនឹង $\mathbf{i}$ ហៅថាចំនួននិម្មិត ។

$\mathbf{i}$ ហៅថាឯកតានិម្មិតដែល $\mathbf{i^2=-1}$ ឬ $\mathbf{i=\sqrt{-1}}$ ។

ឧទាហរណ៍ : $\mathbf{2i\,,-5i\,,\dfrac{2i}{3}\,,\sqrt{3}i\,,...}$ ហៅថាចំនួននិម្មិត ។

ខ. និយមន័យចំនួនកុំផ្លិច

ចំនួនកុំផ្លិចជាចំនួនដែលមានរាង $\mathbf{z=a+i.b}$ ដែល $\mathbf{a}$ និង $\mathbf{b}$ ជាចំនួនពិត ។

គេតាងសំណុំនៃចំនួនកុំផ្លិចដោយ $\mathbb{C}$ ។

$\mathbf{a}$ ហៅថាផ្នែកពិតនៃ $\mathbf{z=a+i.b}$ ដែលកំណត់តាងដោយ $\mathbf{Re(z)=a}$ ។

$\mathbf{b}$ ហៅថាផ្នែកនិម្មិតនៃ $\mathbf{z=a+i.b}$ ដែលកំណត់តាងដោយ $\mathbf{Im(z)=b}$ ។

ឧទាហរណ៍១ : $\mathbf{1+2i\ ,\ -3+2i\ ,\ 4-3i\ ,\ -1-4i\,,5i\ ,-7i}$

ហៅថាចំនួនកុំផ្លិច ។

ឧទាហរណ៍២: រកផ្នែកពិត និង ផ្នែកនិម្មិតនៃ $\mathbf{z=3+2i}$?

ផ្នែកពិត និង ផ្នែកនិម្មិតនៃ $\mathbf{z=3+2i}$ គឺ $\mathbf{Re(Z)=3\ ;\ Im(z)=2}$ ។

២~ប្រមាណវិធីលើចំនួនកុំផ្លិច

ក. វិធីបូកចំនួនកុំផ្លិច

ឧបមាថាគេមានពីរចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = a + i.b$ និង $z_2 = c + i.d$

ដែល a, b, c, d ជាចំនួនពិត ។

គេបាន $z_1 + z_2 = (a + i.b) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$

ដូចនេះ $z_1 + z_2 = (a + c) + i.(b + d)$ ។

ឧទាហរណ៍ : គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = -3 + 2i$ និង $z_2 = 7 - 5i$ ។

គណនា $z_1 + z_2$

គេបាន $z_1 + z_2 = (-3 + 2i) + (7 - 5i) = (-3 + 7) + (2i - 5i)$

ដូចនេះ $z_1 + z_2 = 4 - 3i$ ។

ខ. វិធីដកចំនួនកុំផ្លិច

ឧបមាថាគេមានពីរចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = a + i.b$ និង $z_2 = c + i.d$

ដែល a, b, c, d ជាចំនួនពិត ។

គេបាន $z_1 - z_2 = (a + i.b) - (c + id) = (a - c) + i(b - d)$

ដូចនេះ $z_1 + z_2 = (a - c) + i.(b - d)$ ។

ឧទាហរណ៍ : គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = -3 + 2i$ និង $z_2 = 7 - 5i$ ។

គណនា $z_1 - z_2$

គេបាន $z_1 - z_2 = (-3 + 2i) - (7 - 5i) = (-3 - 7) + (2i + 5i)$

ដូចនេះ $z_1 + z_2 = -10 + 7i$ ។

គ. វិធីគុណចំនួនកុំផ្លិច

ឧបមាថាគេមានពីរចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = a + i.b$ និង $z_2 = c + i.d$

ដែល a, b, c, d ជាចំនួនពិត ។

គេបាន $z_1 \times z_2 = (a + i.b)(c + i.d)$

$$= ac + iad + ibc + i^2bd$$

$$= ac + iad + ibc - bd$$

$$= (ac - bd) + i(ad + bc)$$

ដូចនេះ $z_1 \times z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc)$ ។

ឧទាហរណ៍ : គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 2 + i$ និង $z_2 = 1 - 3i$ ។ គណនា $z_1 \times z_2$

គេបាន $z_1.z_2 = (2 + i)(1 - 3i) = 2 - 6i + i - 3i^2 = 5 - 5i$

ដូចនេះ $z_1.z_2 = 5 - 5i$ ។

ឃ. វិធីចែកចំនួនកុំផ្លិច

ឧបមាថាគេមានពីរចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = a + i.b$ និង $z_2 = c + i.d$

ដែល a, b, c, d ជាចំនួនពិត ។

គេបាន $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{ac - iad + ibc - i^2bd}{c^2 - i^2d^2}$

$$= \frac{ac - iad + ibc + bd}{c^2 + d^2} = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2}$$

ដូចនេះ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i.\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$ ។

ឧទាហរណ៏ : គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 1+5i$ និង $z_2 = 1+i$ ។ គណនា $\frac{z_1}{z_2}$

គេបាន $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+5i}{1+i} = \frac{(1+5i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i+5i+5}{1+1} = \frac{6+4i}{2}$

ដូចនេះ $\frac{z_1}{z_2} = 3+2i$ ។

ង. ស្វ័យគុណនៃ i

គេមានស្វ័យគុណនៃ i ដូចខាងក្រោម :

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2.i = -i$

$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$

$i^5 = i^4.i = i$

$i^6 = i^5.i = i.i = i^2 = -1$

$i^7 = i^6.i = -i$

$i^8 = i^7.i = -i.i = -i^2 = 1$

$- - - - - - - - - - - - - -$

$- - - - - - - - - - - - - -$

ជាទូទៅ $i^{4n} = 1$, $i^{4n+1} = i$, $i^{4n+2} = -1$, $i^{4n+3} = -i$ គ្រប់ $n \in IN$

ដូចនេះចំនួន i^n ស្មើនឹងចំនួនដដែលៗគឺ $i, -1, -i$ និង 1 គ្រប់ $n \in IN$ ។

ច. ស្វ័យគុណនៃចំនួនកុំផ្លិច

គេមានស្វ័យគុណនៃចំនួនកុំផ្លិចដូចខាងក្រោម ៖

$$(a+ib)^2 = a^2 - b^2 + i.2ab$$

$$(a+ib)^3 = (a^3 - 3ab^2) + i(3a^2b - b^3)$$

$$(a+ib)^4 = (a^4 - 6a^2b^2 + b^4) + i(4a^3b - 4ab^3)$$

$$-----------------------$$

$$-----------------------$$

$$(a+ib)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)\, a^{n-k} b^k . i^k$$

ដែល $c(n,k) = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ ។

ឧទាហរណ៍ ៖ គណនា $(1+3i)^2$, $(2+i)^3$ និង $(1+2i)^4$ ។

គេបាន ៖

$$(1+3i)^2 = 1 + 6i - 9 = -8 + 6i$$

$$(2+i)^3 = 8 + 12i - 6 - i = 2 + 11i$$

$$(1+2i)^4 = 1 + 8i - 24 - 32i + 16 = -7 + 24i$$

ឆ. កុំផ្លិចស្មើគ្នា

ឧបមាថា $z_1 = a + ib$ និង $z_2 = c + i.d$ ដែល a, b, c, d ជាចំនួនពិត ។

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

ដូចនេះចំនួនកុំផ្លិចពីរស្មើគ្នាលុះត្រាតែផ្នែកពិតស្មើគ្នា និង ផ្នែកនិម្មិតស្មើគ្នា ។

ឧទាហរណ៍ : គេឱ្យ $\mathbf{z_1 = 2 + 3\lambda + 4i\mu}$ និង $\mathbf{z_2 = \mu - 9 + 8i}$

ចូរកំណត់ពីរចំនួនពិត λ និង μ ដើម្បីឱ្យ $\mathbf{z_1 = z_2}$?

កំណត់ λ និង μ :

$$\mathbf{2 + 3\lambda + 4i\mu = \mu - 9 + 8i \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + 3\lambda = \mu - 9 \\ 4\mu = 8 \end{cases}}$$

គេទាញបាន $\mathbf{\mu = 2 \ , \ \lambda = -3}$ ។

ជ. គណនាឫសការេនៃចំនួនកុំផ្លិច

ឧបមាថាគេមានចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{z = a + i.b}$ ដែល $\mathbf{a, b}$ ជាចំនួនពិត

ដើម្បីគណនាឫសការេនៃ $\mathbf{z}$ គេត្រូវអនុវត្តន៍ដូចខាងក្រោម :

តាង $\mathbf{w = x + i.y}$ ជាឫសការេនៃ $\mathbf{z = a + i.b}$ ($\mathbf{x, y}$ ជាចំនួនពិត)

គេបាន $\mathbf{w^2 = z}$

$$\mathbf{(x + i.y)^2 = a + i.b}$$

$$\mathbf{(x^2 - y^2) + i(2xy) = a + ib}$$

គេទាញបាន $\mathbf{\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}}$

ដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការនេះគេបានគូចម្លើយ $\mathbf{(x, y) = \{(\alpha_1, \beta_1);(\alpha_2, \beta_2)\}}$

ដូចនេះ $\mathbf{w_1 = \alpha_1 + i\beta_1 \ ; \ w_2 = \alpha_2 + i\beta_2}$ ។

ឧទាហរណ៍១ : គណនាឬសការេនៃចំនួនកុំផ្លិច $z = 21 + 20i$

តាង $w = x + i.y$ ជាឬសការេនៃ $z = 21 + 20i$ (x, y ជាចំនួនពិត)

គេបាន $w^2 = z$

$$(x + i.y)^2 = 21 + 20i$$

$$(x^2 - y^2) + i(2xy) = 21 + 20i$$

គេទាញបាន $\begin{cases} x^2 - y^2 = 21 \\ 2xy = 20 \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការនេះគេបានគូចម្លើយ :

$$x = 5 \ , \ y = 2 \ \text{ ឬ } \ x = -5 \ , \ y = -2$$

ដូចនេះ $w_1 = 5 + 2i$; $w_2 = -5 - 2i$ ។

ឧទាហរណ៍២ : គណនាឬសការេនៃចំនួនកុំផ្លិច $z = 21 + 20i$

តាង $w = x + i.y$ ជាឬសការេនៃ $z = -8 - 6i$ (x, y ជាចំនួនពិត)

គេបាន $w^2 = z$

$$(x + i.y)^2 = -8 - 6i$$

$$(x^2 - y^2) + i(2xy) = -8 - 6i$$

គេទាញបាន $\begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ 2xy = -6 \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេបានគូចម្លើយ : $x = 1 \ , \ y = -3$ ឬ $x = -1 \ , \ y = 3$

ដូចនេះ $w_1 = 1 - 3i$; $w_2 = -1 + 3i$ ។

៣_ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់

ក. និយមន័យ

ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{z = a + i.b}$, $\mathbf{a;b \in IR}$ គឺជាចំនួនកុំផ្លិចដែលកំណត់តាងដោយ $\mathbf{\overline{z} = a - i.b}$ ។

ឧទាហរណ៍ : ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ $\mathbf{z = 4 + 3i}$ គឺ $\mathbf{\overline{z} = 4 - 3i}$ ។

ខ. លក្ខណៈ

1. $\mathbf{\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z_1} + \overline{z_2}}$
2. $\mathbf{\overline{(z_1 . z_2)} = \overline{z_1} . \overline{z_2}}$
3. $\mathbf{\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}}$

សម្រាយបញ្ជាក់

តាង $\mathbf{z_1 = a + ib}$ និង $\mathbf{z_2 = c + id}$ ដែល $\mathbf{a , b , c , d}$ ជាចំនួនពិត ។

គេបាន $\mathbf{\overline{z_1} = a - i.b}$ និង $\mathbf{\overline{z_2} = c - i.d}$

មាន $\mathbf{z_1 + z_2 = (a + c) + i(b + d)}$ នោះ $\mathbf{\overline{z_1 + z_2} = (a + c) - i(b + d)}$

ហើយ $\mathbf{\overline{z_1} + \overline{z_2} = a - ib + c - id = (a + c) - i(b + d)}$

ដូចនេះ $\mathbf{\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z_1} + \overline{z_2}}$ ។

គេមាន $\mathbf{z_1 z_2 = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)}$

គេបាន $\mathbf{\overline{z_1 . z_2} = (ac - bd) - i(ad + bc)}$

ហើយ $\mathbf{\overline{z_1} . \overline{z_2} = (a - ib)(c - id) = (ac - id) - i(ad + bc)}$

ដូចនេះ $\overline{(z_1.z_2)} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$ ។

គេមាន $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i.\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$

គេបាន $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} - i.\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$

ហើយ $\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \frac{a-ib}{c-id} = \frac{(a-ib)(c+id)}{(c-id)(c+id)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} - i.\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$

ដូចនេះ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ ។

គ. កន្សោមផ្នែកពិត និង ផ្នែកនិម្មិតជាអនុគមន៍នៃ z និង $\overline{z}$

ឧបមាថាគេមាន $z = a + ib$ នោះ $\overline{z} = a - ib$ ដែល $a;b$ ជាចំនួនពិត ។

គេបាន $z + \overline{z} = a + ib + a - ib = 2a$ នោះ $a = \frac{z+\overline{z}}{2}$

ហើយ $z - \overline{z} = a + ib - a + ib = 2ib$ នោះ $b = \frac{z-\overline{z}}{2i}$

ដូចនេះ $Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$ និង $Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$ ។

-បើ $Re(z) = 0$ នោះ $z = -\overline{z}$ នាំឱ្យ z ជាចំនួននិម្មិត ។

-បើ $Im(z) = 0$ នោះ $z = \overline{z}$ នាំឱ្យ z ជាចំនួនពិត ។

៤-អនុវត្តន៍ចំនួនកុំផ្លិចក្នុងដំណោះស្រាយសមីការដឺក្រេទីពីរ

ឧបមាថាគេមានសមីការដឺក្រេទីពីរ $az^2 + bz + c = 0$

ដែល $a \neq 0$, a, b, c ជាចំនួនពិត ។

ឌីសគ្រីមីណង់នៃសមីការគឺ $\Delta = b^2 - 4ac$

-បើ $\Delta > 0$ សមីការមានឫសពីផ្សេងគ្នាជាចំនួនពិតគឺ :

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \ ; \ z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

-បើ $\Delta = 0$ សមីការមានឫសឌុបជាចំនួនពិតគឺ $z_1 = z_2 = -\dfrac{b}{2a}$

-បើ $\Delta < 0$ សមីការមានឫសពីផ្សេងគ្នាជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នាគឺ :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \ ; \ z_2 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

ឧទាហរណ៍ :

ដោះស្រាយសមីការ $2z^2 - 6z + 5 = 0$

ឌីសគ្រីមីណង់នៃសមីការ $\Delta = 36 - 40 = -4 = 4i^2$

គេទាញឫស $z_1 = \dfrac{6 - 2i}{4} = \dfrac{3}{2} - i.\dfrac{1}{2}$; $z_2 = \dfrac{6 + 2i}{4} = \dfrac{3}{2} + i.\dfrac{1}{2}$

ដូចនេះសមីការមានឫសពីរផ្សេងគ្នាជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នាគឺ :

$z_1 = \dfrac{3}{2} - i.\dfrac{1}{2}$; $z_2 = \dfrac{3}{2} + i.\dfrac{1}{2}$ ។

៥_ចំនួនកុំផ្លិចក្នុងប្លង់

ក. ការតាងចំនួនកុំផ្លិចក្នុងប្លង់

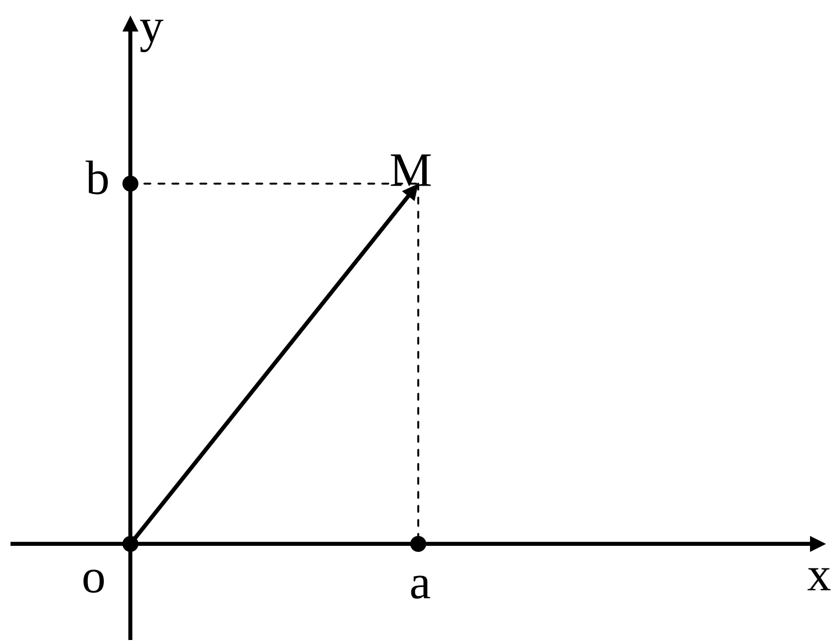
ក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ **(xoy)** គេអាចតាងចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{z = a + i.b \ ; \ a, b \in IR}$ ដោយចំណុច **M** មួយមានកូអរដោនេ $\mathbf{(a, b)}$ ។

គេថា **M** ជាចំនុចរូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{z = a + ib}$ ហើយ $\mathbf{z}$ ហៅថាអាភិចនៃចំនុច $\mathbf{M(a, b)}$ ដែលគេកំណត់សរសេរ $\mathbf{M(z)}$ ។

ដូចគ្នាដែរ គេក៏អាចតាងចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{z = a + i.b \ ; \ a, b \in IR}$ ដោយវ៉ិចទ័រ

$$\overrightarrow{\mathbf{u}} = \overrightarrow{\mathbf{OM}} = \mathbf{(a, b)}$$ ។

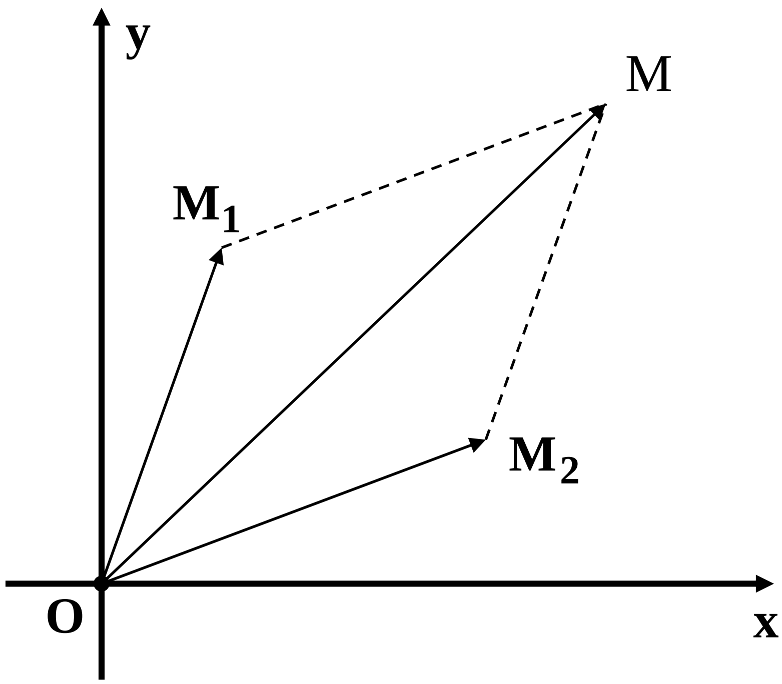
គេថា $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ ជាវ៉ិចទ័ររូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{z = a + ib}$ ហើយ $\mathbf{z}$ ហៅថាអាភិចនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ ដែលគេកំណត់សរសេរ $\overrightarrow{\mathbf{u}}\mathbf{(z)}$ ។



ខ. វ៉ិចទ័ររូបភាពនៃផលបូកចំនួនកុំផ្លិចក្នុងប្លង់កុំផ្លិច

ក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ (xoy) ឧបមាថាគេមានចំនួនកុំផ្លិចពីរ z_1 និង z_2 ហើយតាង M_1 និង M_2 ជារូបភាពនៃ z_1 និង z_2 ។

គេបាន $\overrightarrow{OM_1}$ និង $\overrightarrow{OM_2}$ ជាវ៉ិចទ័ររូបភាពនៃ z_1 និង z_2 ។



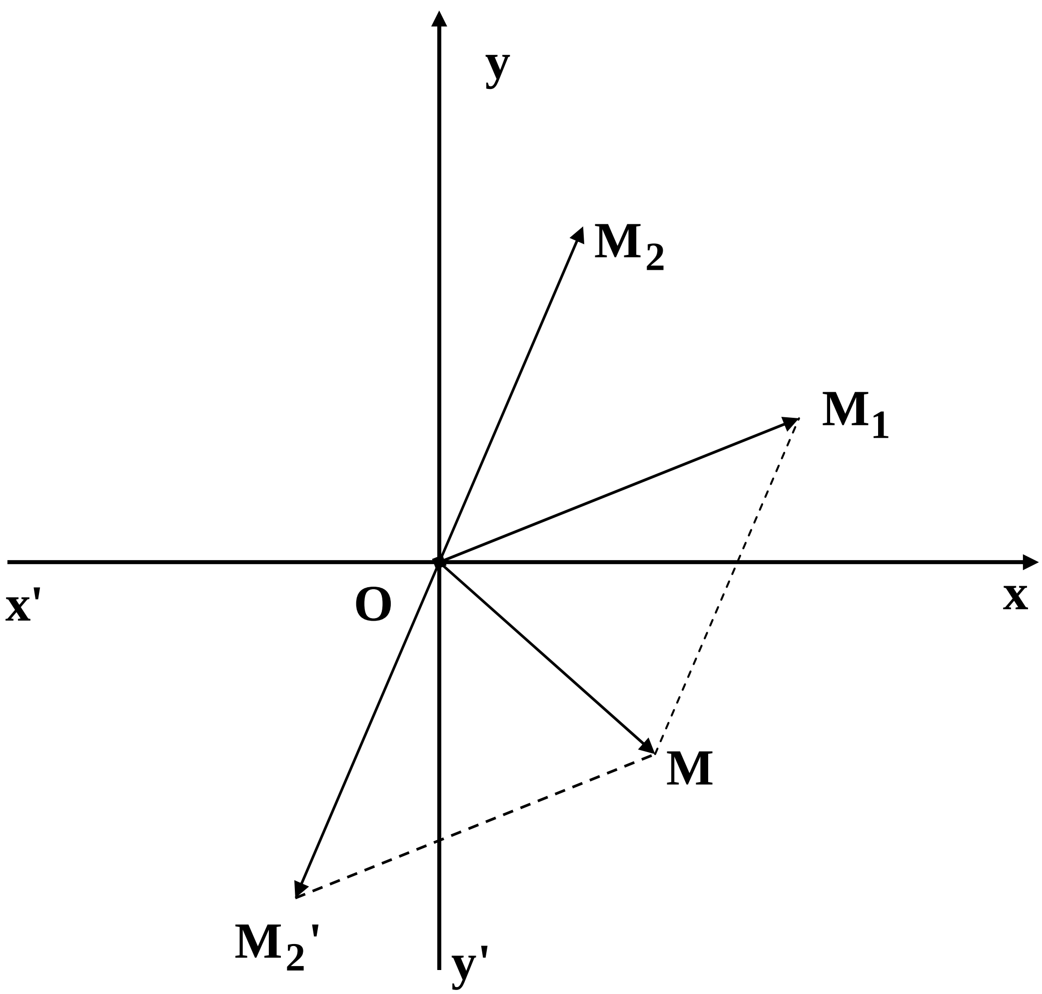
គេមាន $z_1 + z_2 = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM}$

ដូចនេះរូបភាពនៃ $z_1 + z_2$ គឺជាវ៉ិចទ័រអង្កត់ទ្រូងនៃប្រលេឡូក្រាម OM_1MM_2 ។

គ. វ៉ិចទ័ររូបភាពនៃផលដកចំនួនកុំផ្លិចក្នុងប្លង់កុំផ្លិច

ក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ **(xoy)** ឧបមាថាគេមានចំនួនកុំផ្លិចពីរ z_1 និង z_2 ហើយតាង M_1 និង M_2 ជារូបភាពនៃ z_1 និង z_2 ។

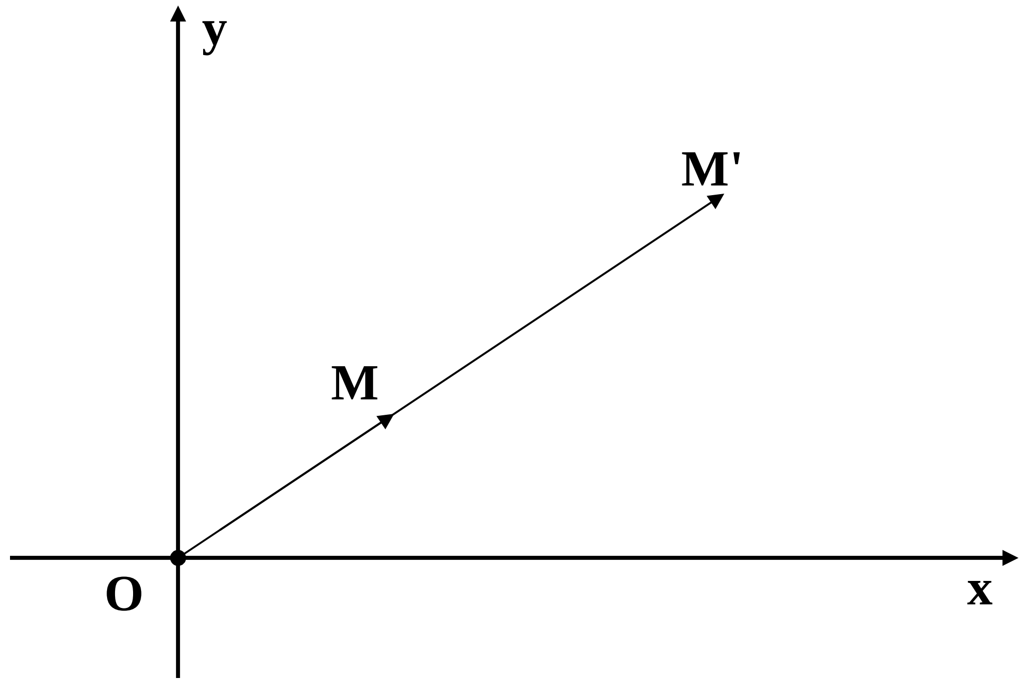
គេបាន $\overrightarrow{OM_1}$ និង $\overrightarrow{OM_2}$ ជាវ៉ិចទ័ររូបភាពនៃ z_1 និង z_2 ។



គេបាន $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM'_2} = \overrightarrow{OM}$

ដូចនេះ រូបភាពនៃ $z_1 - z_2$ គឺជាវ៉ិចទ័រអង្កត់ទ្រូងនៃប្រលេឡូក្រាម $OM_1MM'_2$ ។

ឃ. រូបភាពនៃផលគុណចំនួនពិត នឹង ចំនួនកុំផ្លិចក្នុងប្លង់កុំផ្លិច :



ឧបមាថា $\mathbf{M}$ និង $\mathbf{M'}$ ជាចំនុចរូបភាពនៃ $\mathbf{z}$ និង $\lambda\mathbf{z}$, $(\lambda > 0)$

រូបភាពនៃ $\lambda.\mathbf{z}$ គឺ $\overrightarrow{\mathbf{OM'}}$ ដែល $\overrightarrow{\mathbf{OM'}} = \lambda\,\overrightarrow{\mathbf{OM}}$ ។

៦-ម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិច

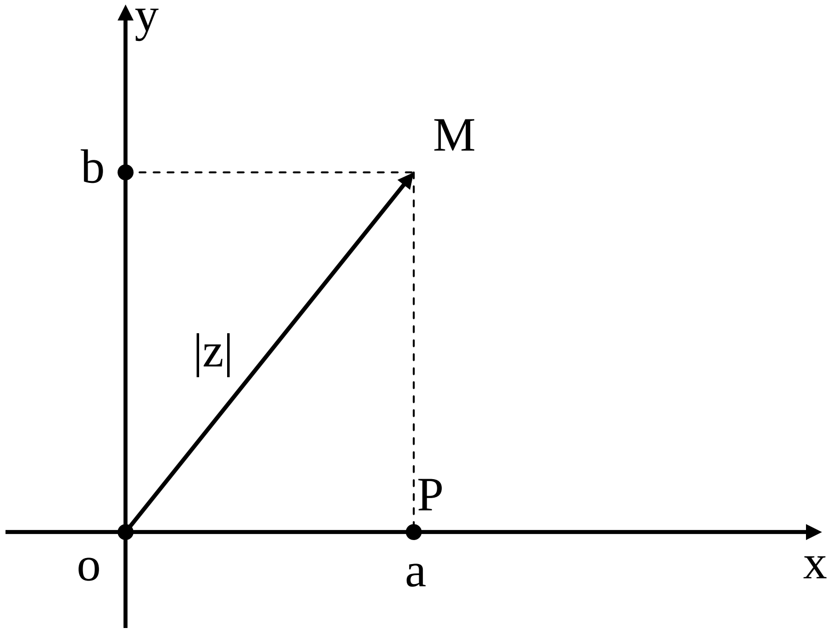
ក. និយមន័យ

ក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ $(\mathbf{xoy})$ គេយក $\mathbf{M(a,b)}$ ជារូបភាពនៃ $\mathbf{z = a + ib}$ ។

រង្វាស់ $\mathbf{OM}$ ហៅថាម៉ូឌុលនៃ $\mathbf{z = a + ib}$ ។

គេកំណត់តាងម៉ូឌុលនៃ $\mathbf{z = a + ib}$ ដោយ $|\mathbf{z}|$ ឬ $\mathbf{r}$ ដែលអាចគណនាបានតាម

រូបមន្ត $|\mathbf{z}| = \mathbf{r} = \mathbf{OM} = \sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}$ ។



ក្នុងត្រីកោណកែង **OMP** គេមាន $\mathbf{OM^2 = MP^2 + OP^2}$

ដោយ $\mathbf{OP = a}$, $\mathbf{MP = b}$

គេបាន $\mathbf{OM^2 = a^2 + b^2}$ ឬ $\mathbf{OM = \sqrt{a^2 + b^2}}$ ។

ដូចនេះ $\mathbf{|z| = OM = \sqrt{a^2 + b^2}}$ ។

ខ. លក្ខណ:

1. $\mathbf{|z| = |\bar{z}|}$

2. $\mathbf{z.\bar{z} = |z|^2}$

3. $\mathbf{|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|}$

4. $\mathbf{\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}}$

5. $\mathbf{|z^n| = |z|^n}$

គ. វិសមភាពត្រីកោណ

គ្រប់ចំនួនកុំផ្លិច z_1 និង z_2 គេមាន $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$

សម្រាយ :

តាង $z_1=x+iy$ និង $z_2=u+iv$

គេមាន $z_1+z_2=(x+u)+i(y+v)$

គេបាន $|z_1+z_2|=\sqrt{(x+u)^2+(y+v)^2}$

និង $|z_1|+|z_2|=\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{u^2+v^2}$

ដោយ $|z_1+z_2|^2=x^2+y^2+u^2+v^2+2(xu+yv)$

និង $(|z_1|+|z_2|)^2=x^2+y^2+u^2+v^2+2\sqrt{(x^2+y^2)(u^2+v^2)}$

គេបាន :

$$(|z_1|+|z_2|)^2-|z_1+z_2|^2=2\left[\sqrt{(x^2+y^2)(u^2+v^2)}-(xu+yv)\right]$$

កន្សោម $(|z_1|+|z_2|)^2-|z_1+z_2|^2\ge 0$ លុះត្រាតែ

$$(x^2+y^2)(u^2+v^2)-(xu+yv)^2\ge 0$$

$$x^2u^2+x^2v^2+u^2y^2+v^2y^2-x^2u^2-2xyuv-y^2v^2\ge 0$$

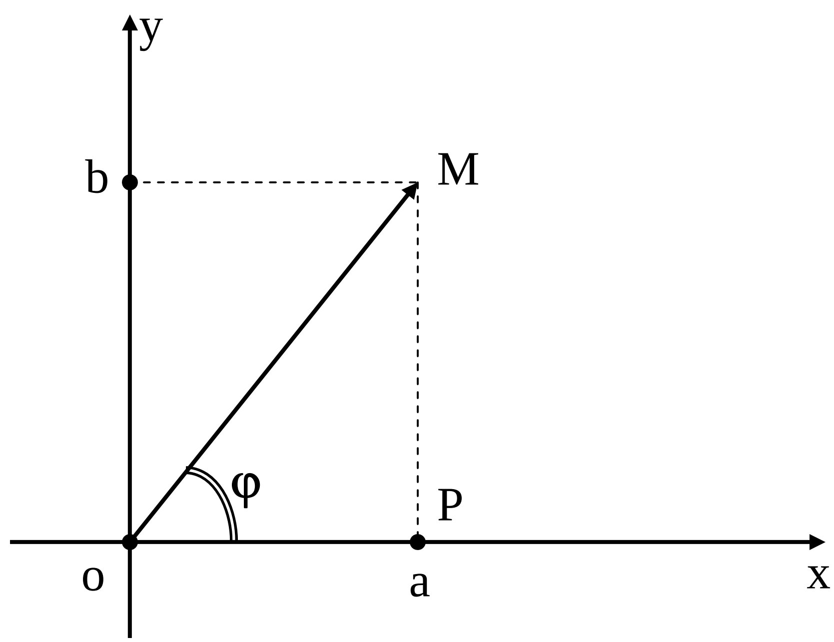
$$x^2v^2-2xyuv+u^2y^2\ge 0$$

$$(xv-uy)^2\ge 0 \text{ ពិត}$$

ដូចនេះ $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$ ។

៧_អាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច

ក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ (xoy) គេយក $M(a,b)$ ជារូបភាពនៃ $z = a + ib$ ។



មុំដែលផ្គុំដោយ $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$ ហៅថាអាគុយម៉ង់នៃ $z = a + i.b$ ។

គេតាង φ ឬ $Arg(z)$ ជាអាគុយម៉ង់នៃ $z = a + i.b$ ។

ក្នុងត្រីកោណកែង OMP គេមាន :

$r^2 = OM^2 = a^2 + b^2$ ឬ $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ (ទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ)

$\cos\varphi = \frac{OP}{OM} = \frac{a}{r}$ និង $\sin\varphi = \frac{MP}{OM} = \frac{b}{r}$ ។

ដើម្បីរកអាគុយម៉ង់នៃ $z = a + i.b$ គេដោះស្រាយសមីការ :

$\cos\varphi = \frac{a}{r}$ និង $\sin\varphi = \frac{b}{r}$ គេបាន $Arg(z) = \varphi + 2k\pi$, $k \in Z$ ។

ឧទាហរណ៍ ១ : រកអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{z = 2\sqrt{3} + 2i}$

តាមរូបមន្ត $\mathbf{r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4}$

$$\mathbf{\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}} \text{ និង } \mathbf{\sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}}$$

ដូចនេះអាគុយម៉ង់នៃ $\mathbf{z}$ គឺ $\mathbf{Arg(z) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ ; \ k \in Z}$

ឧទាហរណ៍ ២ : រកអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{z = -1 + i\sqrt{3}}$

តាមរូបមន្ត $\mathbf{r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-1)^2 + (3)^2} = 2}$

$$\mathbf{\cos\varphi = \frac{a}{r} = -\frac{1}{2}} \text{ និង } \mathbf{\sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

ដូចនេះអាគុយម៉ង់នៃ $\mathbf{z}$ គឺ $\mathbf{Arg(z) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ ; \ k \in Z}$

ទាហរណ៍ ៣ : រកអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{z = \sqrt{2} - i\sqrt{2}}$

តាមរូបមន្ត $\mathbf{r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2 + 2} = 2}$

$$\mathbf{\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2}} \text{ និង } \mathbf{\sin\varphi = \frac{b}{r} = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

ដូចនេះអាគុយម៉ង់នៃ $\mathbf{z}$ គឺ $\mathbf{Arg(z) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \ ; \ k \in Z}$

៨.ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច

ចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{z = a + i.b}$ ហៅថាទម្រង់ពីជគណិត ។ គេអាចសរសេរទម្រង់ថ្មីមួយទៀតដូចខាងក្រោម :

គេមាន $\mathbf{r = \sqrt{a^2 + b^2}}$ ហៅថាម៉ូឌុលនៃ $\mathbf{z = a + i.b}$

$\mathbf{\cos\varphi = \frac{a}{r}}$ និង $\mathbf{\sin\varphi = \frac{b}{r}}$ ដែល φ ហៅថាអាគុយម៉ង់នៃ $\mathbf{z}$ ។

គេបាន $\mathbf{z = a + i.b = r(\frac{a}{r} + i.\frac{b}{r}) = r(\cos\varphi + i.\sin\varphi)}$

ដូចនេះ $\mathbf{z = r(\cos\varphi + i.\sin\varphi)}$ ហៅថាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ $\mathbf{z}$ ។

ឧទាហរណ៍ ១ : ចូរសរសេរ $\mathbf{z = 1 + i\sqrt{3}}$ ជារាងត្រីកោណមាត្រ ។

គេមាន $\mathbf{r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2}$

គេបាន $\mathbf{z = 2(\frac{1}{2} + i.\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi}{3})}$ ។

ឧទាហរណ៍ ២ : ចូរសរសេរ $\mathbf{z = -2\sqrt{3} + 2i}$ ជារាងត្រីកោណមាត្រ ។

គេមាន $\mathbf{r = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + (2)^2} = 4}$

គេបាន $\mathbf{z = 4(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i.\frac{1}{2}) = 4(-\cos\frac{\pi}{6} + i.\sin\frac{\pi}{6})}$ ។

$$\mathbf{z = 4[\cos(\pi - \frac{\pi}{6}) + i.\sin(\pi - \frac{\pi}{6})]}$$

$$\mathbf{z = 4(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})}$$

៩-ប្រមាណវិធីលើចំនួនកុំផ្លិចតាមទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ក. ផលគុណចំនួនកុំផ្លិចតាមទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ទ្រឹស្តីបទ :

ឧបមាថាគេមានចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{z_1 = r_1(\cos\alpha + i.\sin\alpha)}$

និង $\mathbf{z_2 = r_2(\cos\beta + i\sin\beta)}$ ដែល $\mathbf{r_1 > 0\ ,\ r_2 > 0}$

គេបាន $\mathbf{z_1.z_2 = r_1r_2[\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)]}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

គេបាន $\mathbf{z_1z_2 = r_1(\cos\alpha + i.\sin\alpha).r_2(\cos\beta + i\sin\beta)}$

$$z_1z_2 = r_1r_2[(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha)$$

ដូចនេះ $\mathbf{z_1.z_2 = r_1r_2[\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)]}$ ។

ឧទាហរណ៍

គេឱ្យចំនួនកុំឱ្យផ្លិច

$\mathbf{z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5})}$ និង $\mathbf{z_2 = 3(\cos\frac{2\pi}{15} + i\sin\frac{2\pi}{15})}$

គណនា $\mathbf{z_1.z_2}$

គេបាន $\mathbf{z_1z_2 = 6[\cos(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{15}) + i\sin(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{15})]}$

$$\mathbf{= 6(\cos\frac{5\pi}{15} + i\sin\frac{5\pi}{15}) = 6(\cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi}{3})}$$

ដូចនេះ $\mathbf{z_1z_2 = 6(\cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi}{3})}$ ។

ខ. ផលគុណចែកចំនួនកុំផ្លិចតាមទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ទ្រឹស្តីបទ :

ឧបមាថាគេមានចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{z_1 = r_1(\cos\alpha + i.\sin\alpha)}$

និង $\mathbf{z_2 = r_2(\cos\beta + i\sin\beta)}$ ដែល $\mathbf{r_1 > 0}$, $\mathbf{r_2 > 0}$

គេបាន $\mathbf{\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)]}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

គេបាន $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}.\dfrac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\beta + i\sin\beta}$

$$= \frac{r_1}{r_2}.\frac{(\cos\alpha + i.\sin\alpha)(\cos\beta - i\sin\beta)}{(\cos\beta + i\sin\beta)(\cos\beta - i\sin\beta)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}.\frac{(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha)}{\cos^2\beta + \sin^2\beta}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)\right]$$

ដូចនេះ $\mathbf{\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)]}$ ។

គ. ស្វ័យគុណទី $\mathbf{n}$ នៃចំនួនកុំផ្លិចតាមទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ :

ទ្រឹស្តីបទ : គ្រប់ចំនួនពិត $\boldsymbol{\varphi}$ និង $\mathbf{r > 0}$ គេបាន :

$$\mathbf{z^n = [r(\cos\varphi + i.\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i.\sin n\varphi)}$$

ដែល $\mathbf{n}$ ជាចំនួនគត់រឺឡាទីហ្វ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ :

រាមរូបមន្ត $z_1.z_2 = r_1 r_2[\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)]$

គេបានជាបន្តបន្ទាប់ដូចខាងក្រោម :

$$z^2 = z.z = r.r[\cos(\varphi+\varphi)+i\sin(\varphi+\varphi)] = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$$

$$z^3 = z^2.z = r^2.r[\cos(2\varphi+\varphi)+i\sin(2\varphi+\varphi)]$$

$$= r^3(\cos 3\varphi + i.\sin 3\varphi)$$

ឧបមាថា $z^n = r^n(\cos n\varphi + i.\sin n\varphi)$ ពិត

គេបាន $z^{n+1} = z^n.z = r^n.r[\cos(n\varphi+\varphi)+i\sin(n\varphi+\varphi)]$

$= r^{n+1}[\cos(n+1)\varphi + i\sin(n+1)\varphi]$ ពិត

ដូចនេះ $z^n = r^n(\cos n\varphi + i.\sin n\varphi)$ ។

ឃ. រូបមន្តដឺម័រ

គេមាន $z^n = [r(\cos\varphi + i.\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i.\sin n\varphi)$

គេបាន $r^n(\cos\varphi + i.\sin\varphi)^n = r^n(\cos n\varphi + i.\sin n\varphi)$

ដូចនេះ $(\cos\varphi + i.\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i.\sin n\varphi$

(ហៅថារូបមន្តដឺម័រ) ។

ឧទាហរណ៍ : គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{z=\cos\frac{4\pi}{9}+i.\sin\frac{4\pi}{9}}$

ចូរសរសេរ $\mathbf{w=\frac{z^2}{1+z^3}}$ ជារាងត្រីកោណមាត្រ ។

តាមរូបមន្តដឺម័រគេមាន $\mathbf{z^2=(\cos\frac{4\pi}{9}+i\sin\frac{4\pi}{9})^2=\cos\frac{8\pi}{9}+i\sin\frac{8\pi}{9}}$

និង $\mathbf{z^3=(\cos\frac{4\pi}{9}+i\sin\frac{4\pi}{9})^3=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}}$

គេបាន $\mathbf{w=\dfrac{\cos\frac{8\pi}{9}+i.\sin\frac{8\pi}{9}}{1+\cos\frac{4\pi}{3}+i.\sin\frac{4\pi}{3}}}$

$$\mathbf{=\dfrac{\cos\frac{8\pi}{9}+i.\sin\frac{8\pi}{9}}{2\cos^2\frac{2\pi}{3}+2i\sin\frac{2\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{3}}}$$

$$\mathbf{=\frac{1}{2\cos\frac{2\pi}{3}}.\dfrac{\cos\frac{8\pi}{9}+i.\sin\frac{8\pi}{9}}{\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}}}$$

$$\mathbf{=-[\cos(\frac{8\pi}{9}-\frac{2\pi}{3})+i\sin(\frac{8\pi}{9}-\frac{2\pi}{3})]}$$

$$\mathbf{=-(\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9})=\cos\frac{11\pi}{9}+i\sin\frac{11\pi}{9}}$$

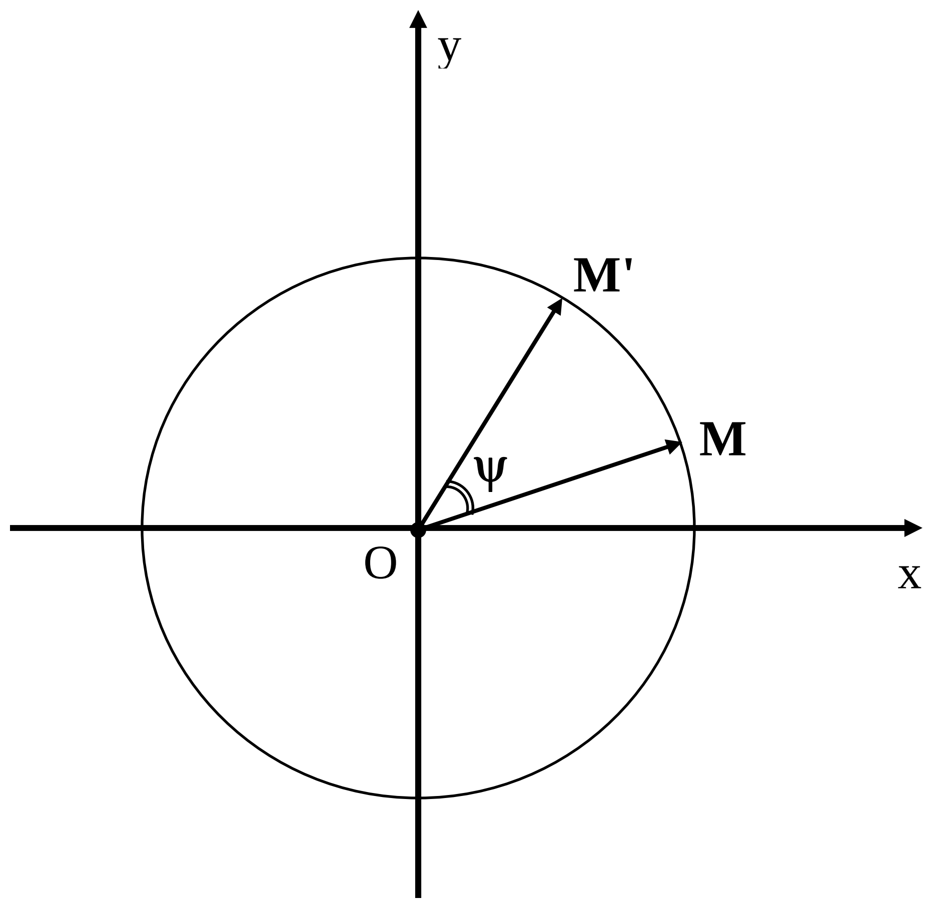
ដូចនេះ $\mathbf{w=\cos\frac{11\pi}{9}+i.\sin\frac{11\pi}{9}}$ ។

១០-បំលែងវិលជុំវិញគល់តម្រុយនៃប្លង់កុំផ្លិច

គេមានចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{w = \cos\psi + i.\sin\psi}$ ។

បើ $\mathbf{M'(z')}$ ជារូបភាពនៃ $\mathbf{M(z)}$ តាមបម្លែងវិលផ្ចិត $\mathbf{O}$ និង មុំ ψ នោះ

គេបាន $\mathbf{z' = w.z = (\cos\psi + i\sin\psi).z}$ ។



ឧទាហរណ៍ ១ : នៅក្នុងប្លង់កុំផ្លិច $\mathbf{(xoy)}$ គេឱ្យ $\mathbf{M}$ ជាចំនុចរូបភាពនៃ $\mathbf{z = \sqrt{3} + i}$ ។

ចូរកំណត់ $\mathbf{z'}$ ដោយដឹងថា $\mathbf{M'(z')}$ ជារូបភាពនៃ $\mathbf{M}$ តាមបម្លែងវិលផ្ចិត $\mathbf{O}$

និងមុំ $\psi = \dfrac{\pi}{12}$ ។

បើ $M'(z')$ ជារូបភាពនៃ $M(z)$ តាមបម្លែងរំវិលផ្ចិត O និងមុំ $\psi = \frac{\pi}{12}$ នោះគេបាន

$$z' = (\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})z$$

ដោយ $z = \sqrt{3} + i = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + i.\frac{1}{2}) = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i.\sin\frac{\pi}{6})$

គេបាន $z' = 2[\cos(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6})]$

ដូចនេះ $z' = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$ ។

ឧទាហរណ៏ ២ : នៅក្នុងប្លង់កុំផ្លិច (xoy) គេឱ្យ M ជាចំនុចរូបភាពនៃ $z = 1 - i\sqrt{3}$ ។

ចូរកំណត់ z' ដោយដឹងថា $M'(z')$ ជារូបភាពនៃ M តាមបម្លែងរំវិលផ្ចិត O

និងមុំ $\psi = \frac{2\pi}{3}$ ។

បើ $M'(z')$ ជារូបភាពនៃ $M(z)$ តាមបម្លែងរំវិលផ្ចិត O និងមុំ $\psi = \frac{2\pi}{3}$ នោះគេបាន

$$z' = (\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})z$$

ដោយ $z = 1 - i\sqrt{3} = 2(\frac{1}{2} - i.\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2[\cos(-\frac{\pi}{3}) + i.\sin(-\frac{\pi}{3})]$

គេបាន $z' = 2[\cos(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3})]$

ដូចនេះ $z' = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$ ។

១១-ឫសទី n នៃចំនួនកុំផ្លិចតាមទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ឧបមាថាគេមានចំនួនកុំផ្លិច $z = r(\cos\psi + i\sin\psi)$

តាង $w = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ជាឫសទី n នៃ z នោះ $w^n = z$

គេបាន $\rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r(\cos\psi + i\sin\psi)$

គេទាញ $\begin{cases} \rho^n = r \\ \cos(n\varphi) = \cos\psi \\ \sin(n\varphi) = \sin\psi \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \varphi = \dfrac{\psi + 2k\pi}{n} \end{cases}$

ដូចនេះឫសទី n នៃ z កំណត់ដោយ :

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\psi + 2k\pi}{n}\right) + i.\sin\left(\frac{\psi + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

ដែល $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ ។

ឧទាហរណ៍ : គណនាឫសទីបីនៃ $z = 4\sqrt{2} + i.4\sqrt{2}$

គេមាន $z = 4\sqrt{2} + i.4\sqrt{2} = 8(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = 8(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

គេទាញ $r = 8$, $\psi = \frac{\pi}{4}$ ។ តាមរូបមន្តឫសទី 3 នៃ z កំណត់ដោយ :

$$w_k = 2\left[\cos\left(\frac{\pi + 8k\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 8k\pi}{12}\right)\right], k = 0, 1, 2$$ ។

ដូចនេះ $w_0 = 2(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}); w_1 = 2(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$

និង $w_2 = 2(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12})$ ។

១២-ទម្រង់អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនៃចំនួនកុំផ្លិច

ក. រូបមន្តអឺលែ (Euler's formula)

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $\mathbf{x}$ គេបាន $\mathbf{e^{ix} = \cos x + i\sin x}$

ដែល $\mathbf{e = 2.71828...}$ ជាគោលលោការីតនេពែ ។

រូបមន្តអឺលែនេះនៅតែពិតចំពោះ $\mathbf{x}$ ជាចំនួនកុំផ្លិចក៏ដោយ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

-ស្រាយបញ្ជាក់ដោយប្រើដេរីវេ :

តាងអនុគមន៍ $\mathbf{f}$ (អាចជាអនុគមន៍កុំផ្លិច) នៃអថេរ $\mathbf{x}$ កំណត់ដោយ

$$\mathbf{f(x) = \frac{\cos x + i\sin x}{e^{ix}}}$$

គេបាន $\mathbf{f'(x) = \frac{(-\sin x + i\cos x)e^{ix} - ie^{ix}(\cos x + i\sin x)}{e^{2ix}}}$

$$\mathbf{= \frac{e^{ix}(-\sin x + i\cos x - i\cos x - i^2\sin x)}{e^{2ix}}}$$

$$\mathbf{= \frac{-\sin x + i\cos x - i\cos x + \sin x}{e^{ix}} = \frac{0}{e^{ix}} = 0}$$

នាំឱ្យ $\mathbf{f(x)}$ ជាអនុគមន៍ថេរគ្រប់ $\mathbf{x}$ ។

គេបាន $\mathbf{f(x) = f(0) = \frac{\cos 0 + i\sin 0}{e^0} = 1}$ ឬ $\mathbf{f(x) = \frac{\cos x + i\sin x}{e^{ix}} = 1}$

ដូចនេះ $\mathbf{e^{ix} = \cos x + i\sin x}$ ។

-ស្រាយបញ្ជាក់ដោយប្រើសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទីមួយ :

គេតាងអនុគមន៍ $g(x) = \cos x + i.\sin x$

គេមាន $g'(x) = -\sin x + i\cos x$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង i គេបាន $i.g'(x) = -i\sin x - \text{csox}$

គេបាន $g(x) + ig'(x) = 0$ ឬ $g'(x) - i.g(x) = 0$

ជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ I ។

គេបានចម្លើយទូទៅនៃសមីការនេះគឺ $g(x) = k\,e^{ix}$

បើ $x = 0$ នោះ $g(0) = k$ តែ $g(0) = \cos 0 + i.\sin 0 = 1$

នោះ $k = 1$ ហើយគេបាន $g(x) = e^{ix}$ ។

ដូចនេះ $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ ។

-ស្រាយបញ្ជាក់ដោយប្រើសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទីពីរ :

ជ្រើសរើសអនុគមន៍ $h(x) = e^{ix}$

គេមាន $h'(x) = i.e^{ix}$ និង $h''(x) = i^2 e^{ix} = -e^{ix}$

គេបាន $h''(x) + h(x) = -e^{ix} + e^{ix} = 0$ ជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែអូម៉ូសែន លំដាប់ទីពីរ ។

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ពីរនេះមានចម្លើយលីនេអ៊ែឯករាជ្យលីនេអ៊ែចំនួនពីរ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់វាគឺ $h_1(x) = \cos x$ និង $h_2(x) = \sin x$ ។ បន្សំលីនេអ៊ែនៃចម្លើយ ចំពោះសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលអូម៉ូសែន ក៏ជាចម្លើយមួយផងដែរ ។

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ $h(x) = A\cos x + B\sin x$

ដែល A និង B ជាពីរចំនួនថេរដែលអាចរកបានតាម $h(0) = A = e^{i0} = 1$

និង $h'(0) = B = ie^{i0} = i$ ព្រោះ $h'(x) = -A\sin x + B\cos x$ ។

ហេតុនេះគេបាន $h(x) = \cos x + i\sin x$ ។

ដូចនេះ $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ ។

-ស្រាយបញ្ជាក់ដោយប្រើសេរីតៃល័រ:

រូបមន្តស៊េរីតៃល័រចំពោះអនុគមន៍បី e^x , $\cos x$ និង $\sin x$ គឺ :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ...$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ...$$

ដោយជំនួស x ដោយ ix ក្នុងស៊េទាំងបីនេះគេទាញបាន $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ ។

ខ. ទម្រង់អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

គ្រប់ចំនួនកុំផ្លិច $z = a + i.b$ ដែល a, b ជាចំនួនពិតអាចសរសេរជាទម្រង់មួយថ្មីទៀត

គឺ $z = r\,e^{i\theta}$ ដែល $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos\theta = \frac{a}{r}$, $\sin\theta = \frac{b}{r}$ ។

ទម្រង់ $z = r\,e^{i\theta}$ ហៅថាទម្រង់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនៃ $z = a + i.b$ ។

គ. ទំនាក់ទំនងជាមួយអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ :

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $\mathbf{x}$ គេមាន $\mathbf{e^{ix} = \cos x + i\sin x}$ **(1)**

ជំនួស $\mathbf{x}$ ដោយ $\mathbf{-x}$ គេបាន $\mathbf{e^{-ix} = \cos x - i\sin x}$ **(2)**

បូកសមីការ **(1)** និង **(2)** គេទាញបាន $\mathbf{e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x}$

គេទាញ $\mathbf{\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}}$ ។

ដកសមីការ **(1)** និង **(2)** គេទាញបាន $\mathbf{e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin x}$

គេទាញ $\mathbf{\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}}$ ។

ដូចនេះ $\mathbf{\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\ ;\ \sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}}$ ។

(រូបមន្តនេះពិតផងដែរចំពោះ $\mathbf{x}$ ជាចំនួនកុំផ្លិច)

ឃ. ទំនាក់ទំនងជាមួយអនុគមន៍អ៊ីពែបូលិក:

គេមាន $\mathbf{\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\ ;\ \sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}}$

ជំនួស $\mathbf{x}$ ដោយ $\mathbf{i.x}$ គេបាន :

$$\mathbf{\cos(ix) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \cosh x} \text{ និង } \mathbf{\sin(ix) = i\,\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = i\sinh x}$$

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $\mathbf{\cosh x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}}$ និង $\mathbf{\sinh x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}}$ គេបាន :

$$\mathbf{\cosh(ix) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x\ ,\ \sinh(ix) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = i\sin x} \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍១ : សរសេរ $z=2+2i\sqrt{3}$ ជាទម្រង់អិុចស្ប៉ូណង់ស្យែល ?

គេមាន $r=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=4$

គេបាន $z=4(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})=4(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})=4e^{i\frac{\pi}{3}}$ ។

ឧទាហរណ៍២: សរសេរ $z=1+e^{i\frac{\pi}{4}}$ ជារាងអិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ?

គេមាន $z=1+e^{i\frac{\pi}{4}}=e^{i\frac{\pi}{8}}(e^{-i\frac{\pi}{8}}+e^{i\frac{\pi}{8}})$ ដោយ $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{e^{i\frac{\pi}{8}}+e^{-i\frac{\pi}{8}}}{2}$

ដូចនេះ $z=2\cos\frac{\pi}{8}.e^{i\frac{\pi}{8}}$ ។

ឧទាហរណ៍៣: គណនា i^i ?

គេមាន $i=\cos\frac{\pi}{2}+i.\sin\frac{\pi}{2}=e^{i\frac{\pi}{2}}$

គេបាន $i^i=\left(e^{\frac{i\pi}{2}}\right)^i=e^{-\frac{\pi}{2}}$ ។

ឧទាហរណ៍៤: ដោះស្រាយសមីការ $\cos x=2$ ក្នុងសំណុំកុំផ្លិច ?

តាមរូបមន្តអឺលែគេមាន $\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

គេបាន $\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=2$ ឬ $e^{2ix}-4e^{ix}+1=0$ តាង $t=e^{ix}$

គេបានសមីការ $t^2-4t+1=0$

$\Delta'=4-1=3$ គេទាញឫស $t_1=2-\sqrt{3}$; $t_2=2+\sqrt{3}$

ចំពោះ $t=2-\sqrt{3}$ គេបាន $e^{ix}=2-\sqrt{3}$ នោះ $ix=\ln(2-\sqrt{3})$

ឬ $x=-i\ln(2-\sqrt{3})$ ។

ចំពោះ $t=2+\sqrt{3}$ គេបាន $e^{ix}=2+\sqrt{3}$ នោះ $ix=\ln(2+\sqrt{3})$

ឬ $x=-i\ln(2+\sqrt{3})$ ។

ឧទាហរណ៏៥: ដោះស្រាយសមីការ $\sin x=-3$ ក្នុងសំណុំកុំផ្លិច ?

តាមរូបមន្តអឺលែគេមាន $\sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

គេបាន $\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}=-3$ ឬ $e^{2ix}+6e^{ix}-1=0$ តាង $t=e^{ix}$

គេបានសមីការ $t^2+6t-1=0$, $\Delta'=9+1=10$

មានឫស $t_1=-3+\sqrt{10}$, $t_2=-3-\sqrt{10}$ ។

-ចំពោះ $t=-3+\sqrt{10}$ គេបាន $e^{ix}=-3+\sqrt{10}$ នោះ $x=-i\ln(-3+\sqrt{10})$

-ចំពោះ $t=-3-\sqrt{10}=-(3+\sqrt{10})$

គេបាន $e^{ix}=-(3+\sqrt{10})=(3+\sqrt{10})e^{i\pi}=e^{i\pi+\ln(3+\sqrt{10})}$

គេទាញ $ix=i\pi+\ln(3+\sqrt{10})$ ឬ $x=\pi-i\ln(3+\sqrt{10})$ ។

ដូចនេះ $x=-i\ln(-3+\sqrt{10})$, $x=\pi-i\ln(3+\sqrt{10})$ ។

១៣~ប្រមាណវិធីចំនួនកុំផ្លិចតាមទម្រង់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

ក. ប្រមាណវិធីគុណចំនួនកុំផ្លិចតាមទម្រង់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

គេមានចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{z = r\,e^{i\varphi}}$ និង $\mathbf{w = \rho\,e^{i\psi}}$

ដែល $\mathbf{r > 0\ ;\ \rho > 0}$ ហើយ $\varphi\ ,\ \psi$ ជាចំនួនពិត ។

គេបាន $\mathbf{z.w = r.\rho\,e^{i(\varphi+\psi)}}$ ។

ខ. ប្រមាណវិធីចែកចំនួនកុំផ្លិចតាមទម្រង់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

គេមានចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{z = r\,e^{i\varphi}}$ និង $\mathbf{w = \rho\,e^{i\psi}}$

ដែល $\mathbf{r > 0\ ;\ \rho > 0}$ ហើយ $\varphi\ ,\ \psi$ ជាចំនួនពិត ។

គេបាន $\mathbf{\dfrac{z}{w} = \dfrac{r}{\rho}e^{i(\varphi-\psi)}}$ ។

គ. ស្វ័យគុណចំនួនកុំផ្លិចតាមទម្រង់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

គេមានចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{z = r\,e^{i\varphi}}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីហ្វ $\mathbf{n}$ គេបាន :

$\mathbf{z^n = \left(r\,e^{i\varphi}\right)^n = r^n\,e^{in\varphi}}$ ។

ឧទាហរណ៍ : គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}}$ និង $\mathbf{w = 3e^{i\frac{\pi}{12}}}$ ។

គណនា $\mathbf{z.w}$ និង $\mathbf{\dfrac{z}{w}}$

គេបាន $\mathbf{z.w = 6\,e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12})} = 6e^{i\frac{\pi}{4}}}$ និង $\mathbf{\dfrac{z}{w} = \dfrac{2}{3}e^{i(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{12})} = \dfrac{2}{3}e^{i\frac{\pi}{12}}}$

១៤~អនុវត្តន៍ចំនួនកុំផ្លិចក្នុងត្រីកោណមាត្រ

ក. រូបមន្តមុំឌុប

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $\mathbf{x}$ គេមាន $\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$; $\sin x = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

គេបាន $\cos^2 x = \left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 = \dfrac{e^{2ix}+e^{-2ix}+2}{4}$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}.\frac{e^{2ix}+e^{-i2x}}{2}+\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}$$

គេទាញ $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ ។

ហើយ $\sin 2x = \dfrac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i} = 2.\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

ដូចនេះ $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ ។

ខ. រូបមន្តមុំទ្រីប

គេមាន $\cos^3 x = \left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3$

$$= \frac{e^{3ix}+e^{-3ix}+3(e^{ix}+e^{-ix})}{8}$$

$$= \frac{2\cos 3x + 6\cos x}{8} = \frac{\cos 3x + 3\cos x}{4}$$

គេទាញបាន $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ ។

ហើយ $\sin^3 x = \left(\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3$

$$= \frac{(e^{3ix} - e^{-3ix}) - 3(e^{ix} - e^{-ix})}{-8i}$$

$$= \frac{2i\sin 3x - 6i\sin x}{-8i}$$

$$= \frac{\sin 3x - 3\sin x}{-4}$$

គេទាញបាន $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ ។

គ. រូបមន្តផលបូក និង ផលដកនៃមុំពីរ

គេមាន $e^{i(a+b)} = e^{ia}.e^{ib}$ គ្រប់ចំនួនពិត a និង b

ដោយ $e^{ia}.e^{ib} = (\cos a + i\sin a)(\cos b + i\sin b)$

$$e^{ia}e^{ib} = (\cos a\cos b - \sin a\sin b) + i(\sin a\cos b + \sin b\cos a)$$

ហើយ $e^{i(a+b)} = \cos(a+b) + i\sin(a+b)$

ដូចនេះ $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$

និង $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $e^{i(a-b)} = e^{ia}.e^{-ib}$ គ្រប់ចំនួនពិត a និង b

ដោយ $e^{ia}.e^{-ib} = (\cos a + i\sin a)(\cos b - i\sin b)$

$$e^{ia}e^{-ib} = (\cos a\cos b + \sin a\sin b) + i(\sin a\cos b - \sin b\cos a)$$

ហើយ $e^{i(a-b)} = \cos(a-b) + i\sin(a-b)$

ដូចនេះ $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$

និង $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a$ ។

ឃ. រូបមន្តបំលែងពីផលគុណទៅផលបូក

$$\cos a\cos b=\frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2}\cdot\frac{e^{ib}+e^{-ib}}{2}$$

$$=\frac{e^{i(a+b)}+e^{i(a-b)}+e^{-i(a-b)}+e^{-i(a+b)}}{4}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{e^{i(a+b)}+e^{-i(a+b)}}{2}+\frac{e^{i(a-b)}+e^{-i(a-b)}}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]$$

ដូចនេះ $\cos a\cos b=\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]$

$$\sin a\sin b=\frac{e^{ia}-e^{-ia}}{2i}\cdot\frac{e^{ib}-e^{-ib}}{2i}$$

$$=\frac{e^{i(a+b)}-e^{i(a-b)}-e^{-i(a-b)}+e^{-i(a+b)}}{4i^2}$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{e^{i(a+b)}+e^{-i(a+b)}}{2}-\frac{e^{i(a-b)}+e^{-i(a-b)}}{2}\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)-\cos(a-b)\right]$$

ដូចនេះ $\sin a\sin b=\frac{1}{2}\left[\cos(a-b)+\cos(a+b)\right]$

១៥_អនុវត្តន៍ចំនួនកុំផ្លិចក្នុងស្វ៊ីតចំនួនពិត

ចំពោះស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (a_n) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងកំណើន :

$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ ដែល $p\,,q$ ជាចំនួនពិត

សមីការសម្គាល់របស់ស្វ៊ីតនេះគឺ $z^2 + pz + q = 0$

ក្នុងករណី $\Delta = p^2 - 4q < 0$ សមីការមានឬសពីរជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នា

គឺ z_1 និង z_2 ។ ក្នុងករណីនេះដើម្បីគណនា a_n គេត្រូវអនុវត្តន៍ដូចតទៅ :

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $z_n = a_{n+1} - z_1 a_n$ រួចស្រាយថា (z_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ នៃចំនួនកុំផ្លិចមួយ ។

គណនា z_n រួចទាញរក a_n ។

ឧទាហរណ៍ គេមានស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (a_n) កំណត់ដោយ :

$a_0 = 0\ ,\ a_1 = 1$ និង $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$ ដែល $n = 0,1,2,...$

ចូរគណនា a_n ជាអនុគមន៍នៃ n

សមីការសម្គាល់នៃស្វ៊ីត $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$ គឺ : $r^2 = r - 1$

ឬ $r^2 - r + 1 = 0$; $\Delta = 1 - 4 = -3 = 3i^2$

មានឬស $r_1 = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}$; $r_2 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $z_n = a_{n+1} - \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2} a_n$

គេបាន $z_{n+1} = a_{n+2} - \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2} a_{n+1}$ តែ $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$

គេបាន $z_{n+1} = a_{n+1} - a_n - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} a_{n+1}$

$$z_{n+1} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} a_{n+1} - a_n$$

$$z_{n+1} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} (a_{n+1} - \frac{2}{1 + i\sqrt{3}} a_n)$$

$$z_{n+1} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} (a_{n+1} - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} a_n)$$

$$z_{n+1} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} a_n$$

គេបាន (z_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ នៃចំនួនកុំផ្លិចមានរេសុង $q = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ ។

តាមរូបមន្ត $z_n = z_0 \times q^n$

ដោយ $z_0 = a_1 - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} a_0 = 1$ និង $q = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$

គេបាន $z_n = (\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})^n = \cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}$

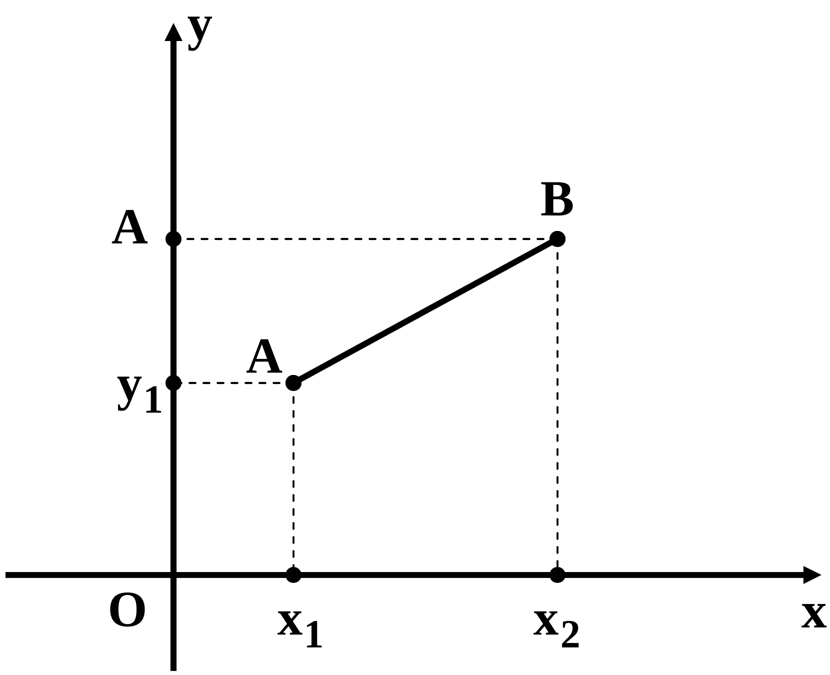
ដោយ $z_n = a_{n+1} - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} a_n = (a_{n+1} - \frac{a_n}{2}) + i\frac{\sqrt{3}}{2} a_n$

គេទាញ $\frac{\sqrt{3}}{2} a_n = \sin\frac{n\pi}{3}$

ដូចនេះ $a_n = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\frac{n\pi}{3}$ ។

១៦_អនុវត្តន៍ចំនួនកុំផ្លិចក្នុងធរណីមាត្រ

ក. ចម្ងាយរវាងពីរចំនុច



គេមានចំនួនកុំផ្លិចពីរ $z_1 = x_1 + i.y_1$ និង $z_2 = x_2 + i.y_2$ ។

តាង A និងB ជាចំនុចរូបភាពនៃ z_1 និង z_2 ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច (xoy) ។

គេបាន $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

ហើយ $z_2 - z_1 = (x_2 - x_1) + i(y_2 - y_1)$

គេបាន $|z_2 - z_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

ដូចនេះ $AB = |z_2 - z_1|$ ។

ឧទាហរណ៍ ១

គេឱ្យពីរចំនុច $\mathbf{A}$ និង $\mathbf{B}$ មានអាហ្វិករៀងគ្នា $\mathbf{z_1 = 1 + 2i}$ និង $\mathbf{z_2 = -2 + 6i}$

ចូរគណនាចម្ងាយរវាងចំនុច $\mathbf{A}$ និង $\mathbf{B}$

គេបាន
$$\begin{aligned}\mathbf{AB} &= |\mathbf{z_2 - z_1}| \\ &= |\mathbf{(-2+6i)-(1+2i)}| \\ &= |\mathbf{-3+4i}| = \sqrt{\mathbf{(-3)^2+4^2}} = \mathbf{5}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\mathbf{AB = 5}$ ។

ឧទាហរណ៍២

គេមានចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{z_1 = 2 + a + i}$ និង $\mathbf{z_2 = 3 + i(6 - a)}$ ដែល $\mathbf{a \in IR}$

ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច $\mathbf{(xoy)}$ គេតាង $\mathbf{A}$ និង $\mathbf{B}$ ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{z_1}$ និង $\mathbf{z_2}$

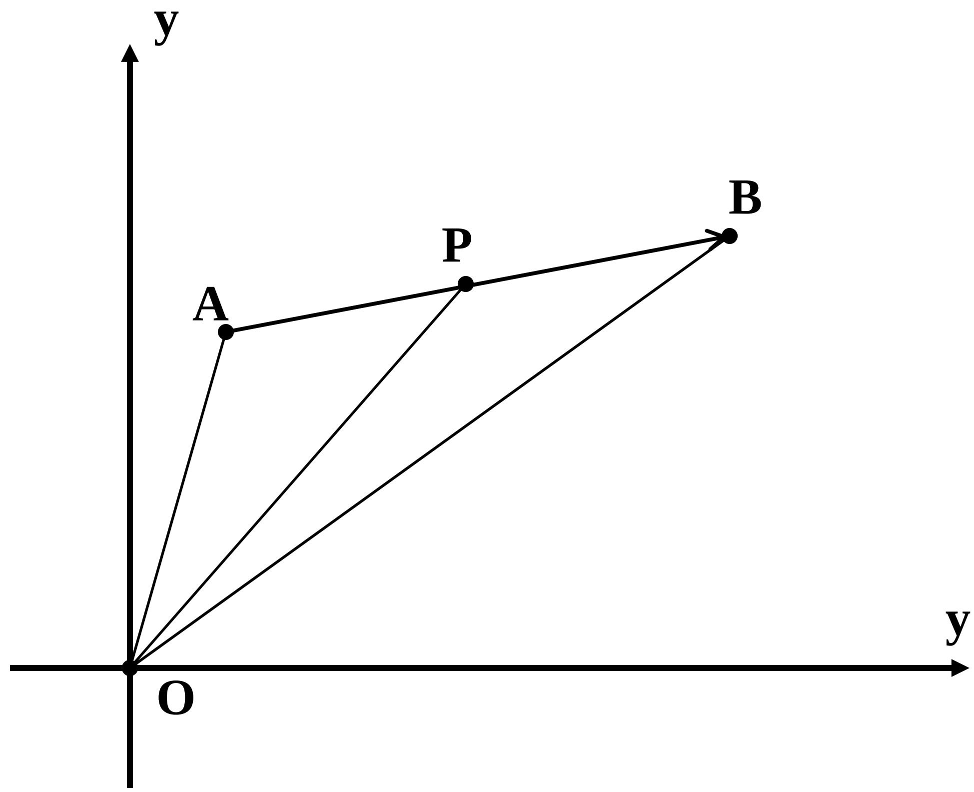
ចូរកំណត់ចំនួនពិត $\mathbf{a}$ ដើម្បីឱ្យចម្ងាយរវាងចំនុច $\mathbf{A}$ និង $\mathbf{B}$ ខ្លីបំផុត ?

គេបាន
$$\begin{aligned}\mathbf{AB} &= |\mathbf{z_2 - z_1}| \\ &= |\mathbf{3+i(6-a)-2-a-i}| \\ &= |\mathbf{(1-a)+i(5-a)}| = \sqrt{\mathbf{(1-a)^2+(5-a)^2}} \\ &= \sqrt{\mathbf{1-2a+a^2+25-10a+a^2}} \\ &= \sqrt{\mathbf{2a^2-12a+26}} \\ &= \sqrt{\mathbf{2(a-3)^2+8}}\end{aligned}$$

ដើម្បីឱ្យ $\mathbf{AB}$ ខ្លីបំផុតលុះត្រាតែ $\mathbf{a = 3}$ ហើយ $\mathbf{AB_{min} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}}$ ។

ខ. ចំនុចចែកក្នុងអង្កត់តាមផលធៀបមួយ :

ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច **(xoy)** គេតាង **A** និង **B** ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច z_A និង z_B យក **P** ជាចំនុចមានអាហ្វិក z_P ជាចំនុចចែកក្នុងនៃអង្កត់ $[AB]$ តាមផលធៀប λ ដែល $\lambda > 0$ ។



បើ **P** ជាចំនុចចែកក្នុងនៃអង្កត់ $[AB]$ តាមផលធៀប λ នោះ $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{PB}$

គេមាន $\overrightarrow{AP}(z_P - z_A)$ និង $\overrightarrow{PB}(z_B - z_P)$

គេបាន $z_p - z_A = \lambda(z_B - z_P)$

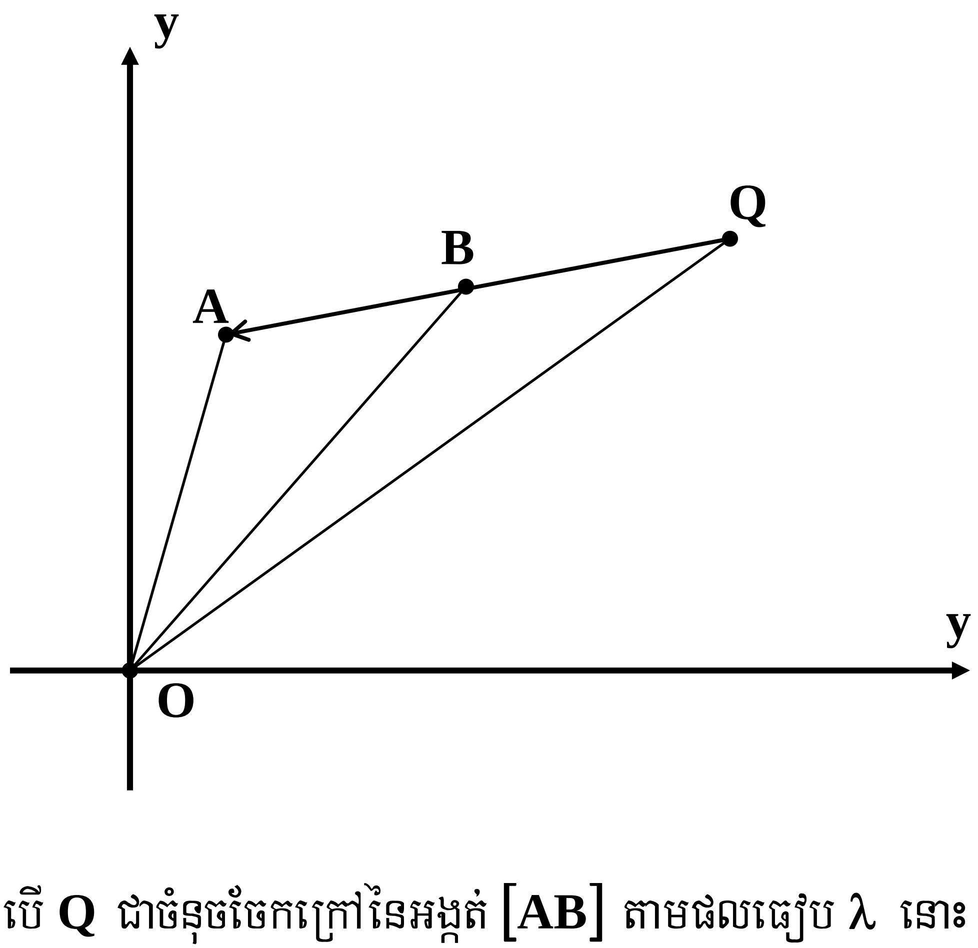
ដូចនេះ $z_P = \dfrac{z_A + \lambda z_B}{1+\lambda}$ ។

ករណី $\lambda = 1$ នោះចំនុច $\mathbf{P}$ ជាចំនុចកណ្តាលនៃអង្កត់ $[\mathbf{AB}]$

ដូចនេះអាហ្វិកនៃចំនុច $\mathbf{P}$ កណ្តាលអង្កត់ $[\mathbf{AB}]$ គឺ $z_P = \dfrac{z_A + z_B}{2}$ ។

គ. ចំនុចចែកក្រៅអង្កត់តាមផលធៀបមួយ :

ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច (xoy) គេតាង $\mathbf{A}$ និង $\mathbf{B}$ ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច z_A និង z_B យក $\mathbf{Q}$ ជាចំនុចមានអាហ្វិក z_Q ជាចំនុចចែកក្រៅនៃអង្កត់ $[\mathbf{AB}]$ តាមផលធៀប λ ដែល $\lambda > 0$ ។



បើ $\mathbf{Q}$ ជាចំនុចចែកក្រៅនៃអង្កត់ $[\mathbf{AB}]$ តាមផលធៀប λ នោះ $\overrightarrow{QA} = \lambda\,\overrightarrow{QB}$

គេមាន $\overrightarrow{QA}\,(z_A - z_Q)$ និង $\overrightarrow{QB}\,(z_B - z_Q)$

គេបាន $z_A - z_Q = \lambda(z_B - z_Q)$

ដូចនេះ $z_Q = \dfrac{z_A - \lambda z_B}{1-\lambda}$ ។

ឧទាហរណ៏ : គេមានពីរចំនុច A និង B ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច $z_A = 2+7i$ និង $z_B = -1+i$ ។

P ជារូបភាពនៃ z_p ជាចំនុចចែកក្នុងនៃ $[AB]$ តាមផលធៀប $\lambda_p = \dfrac{1}{3}$

Q ជារូបភាពនៃ z_Q ជាចំនុចចែកក្រៅនៃ $[AB]$ តាមផលធៀប $\lambda_Q = \dfrac{2}{3}$

ចូរកំណត់ z_P និង z_Q ?

បើ P ជារូបភាពនៃ z_p ជាចំនុចចែកក្នុងនៃ $[AB]$ តាមផលធៀប $\lambda_p = \dfrac{1}{3}$

គេបាន $$z_P = \frac{z_A + \lambda_P z_B}{1+\lambda_P} = \frac{2+7i - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}i}{1+\frac{1}{3}} = \frac{5}{4} + \frac{11}{2}i$$ ។

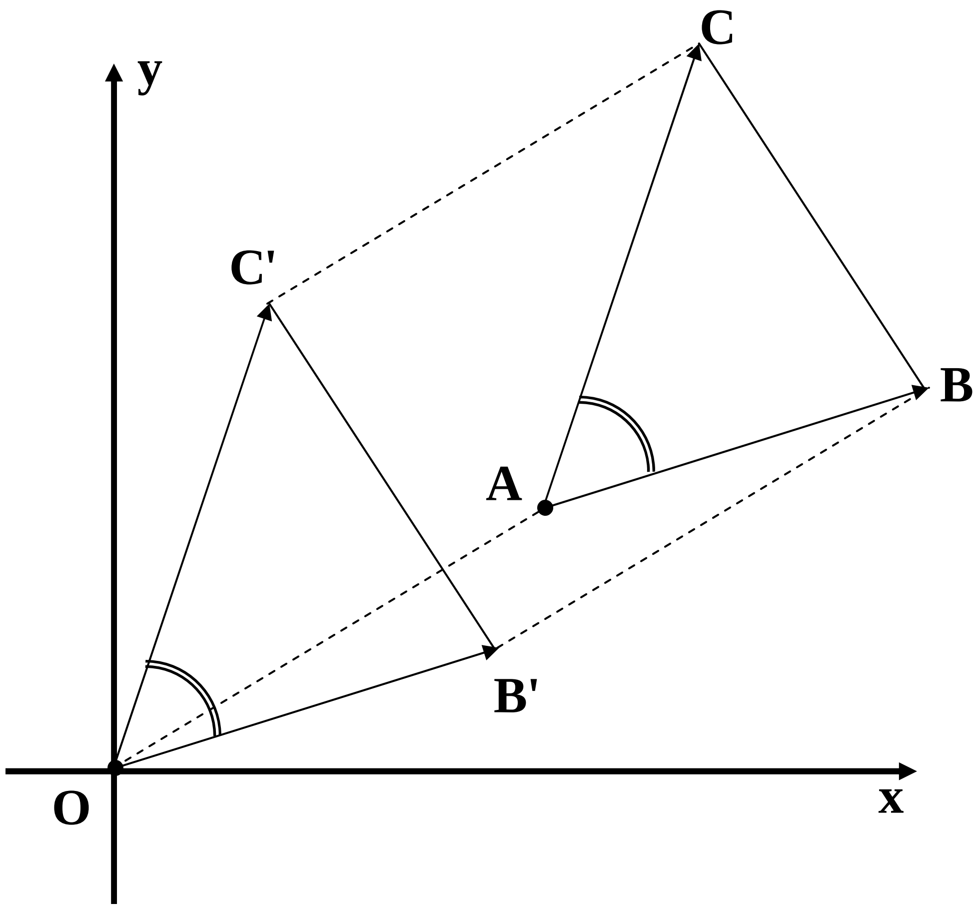
បើ Q ជារូបភាពនៃ z_Q ជាចំនុចចែកក្រៅនៃ $[AB]$ តាមផលធៀប $\lambda_Q = \dfrac{2}{3}$

គេបាន $$z_Q = \frac{z_A - \lambda_Q z_B}{1-\lambda_Q} = \frac{2+7i + \frac{2}{3} - \frac{2}{3}i}{1-\frac{2}{3}} = 8+19i$$

ដូចនេះ $z_P = \dfrac{5}{4} + \dfrac{11}{2}i$ និង $z_Q = 8+19i$ ។

គ. ផលធៀបជ្រុង និង មុំនៃត្រីកោណក្នុងប្លង់

ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច **(xoy)** គេមានបីចំនុច **A , B , C** ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច z_A , z_B , z_C ។



សង់វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{AC}$ នោះគេបាន $\Delta OB'C'$ និង ΔABC ជាត្រីកោណប៉ុនគ្នា នោះ $\angle BAC = \angle B'OC'$ ។

គេមាន $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{AB}\,(z_B - z_A)$ និង $\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{AC}\,(z_C - z_A)$

គេមាន $\angle B'OC' = \angle XOC' - \angle XOB'$

ឬ $\angle BAC = \arg(z_C - z_A) - \arg(z_B - z_A) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$

ហើយផលធៀបជ្រុង $\frac{AC}{AB} = \frac{|z_C - z_A|}{|z_B - z_A|} = \left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right|$ ។

ដូចនេះបើ $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ បង្កើតបានជាត្រីកោណ ABC នោះ

គេបាន $\frac{AC}{AB} = \left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right|$ និង $\angle BAC = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$ ។

ឧទាហរណ៍ :

នៅក្នុងប្លង់កុំផ្លិច (XOY) គេឱ្យបីចំនុច A , B , C មានអាហ្វិករៀងគ្នា :

$z_A = 2 + i$, $z_B = 3 + 4i$, $z_C = -2 + 9i$ ។

ចូរគណនាផលធៀបជ្រុង $\frac{AC}{AB}$ និង $\angle BAC$?

គេមាន $z_C - z_A = -2 + 9i - 2 - i = -4 + 8i$

និង $z_B - z_A = 3 + 4i - 2 - i = 1 + 3i$

គេបាន $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-4 + 8i}{1 + 3i} = \frac{(-4 + 8i)(1 - 3i)}{(1 + 3i)(1 - 3i)} = 2 + 2i$

$$= 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

ដូចនេះ $\frac{AC}{AB} = 2\sqrt{2}$ និង $\angle BAC = \frac{\pi}{4}$ ។

ឃ. សំណុំចំណុចក្នុងប្លង់កុំផ្លិច

ក្នុងប្លង់កុំផ្លិចប្រកបដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o, \vec{i}\ , \vec{j}\ )$ គេតាងចំនុច$P(x;y)$ ជាចំនុចរូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច $z = x + i.y$ ។

សំណុំនៃរូបភាព P ទាំងអស់ដែលអាចមានទៅតាមលក្ខខណ្ឌដែលត្រូវបំពេញនៃ z បង្កើតបានជាសំណុំនៃចំនុច P ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច ។

ឧទាហរណ៏ ១

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច z ផ្ទៀងផ្ទាត់ $(1+i)z + (1-i)\overline{z} = 4$ ។

P ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច z ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច (xoy) ។ រកសំណុំចំនុច P ?

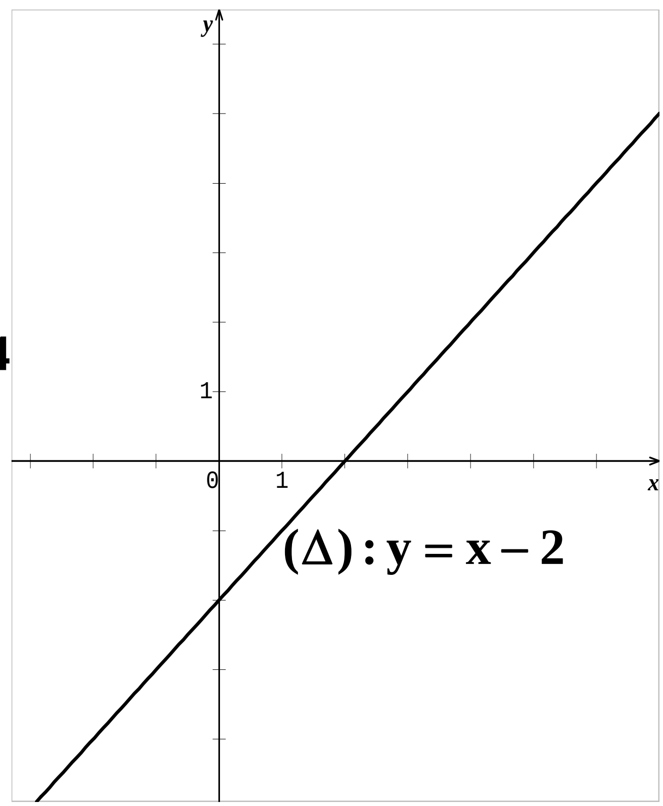
តាង $z = x + i.y$ នោះ $\overline{z} = x - i.y$

គេមាន $(1+i)z + 2(1-i)\overline{z} = 4$

គេបាន :

$$(1+i)(x+iy) + (1-i)(x-iy) = 4$$
$$x + iy + ix - y + x - iy - ix - y = 4$$
$$2x - 2y = 4 \Rightarrow y = x - 2$$

ដូចនេះសំណុំចំនុច P គឺជាបន្ទាត់ ដែលមានសមីការ $(\Delta) : y = x - 2$

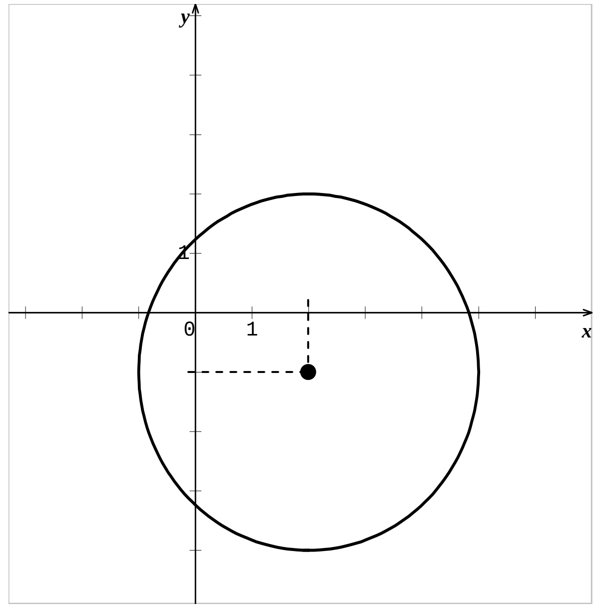


ឧទាហរណ៍ ២

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{z}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $|\mathbf{z}-2+\mathbf{i}|=3$ ។

$\mathbf{P}$ ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{z}$ ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច $(\mathbf{xoy})$ ។

រកសំណុំចំនុច $\mathbf{P}$?



តាង $\mathbf{z}=\mathbf{x}+\mathbf{i}.\mathbf{y}$ ជាអាហ្វិកនៃចំនុច $\mathbf{P}$

គេមាន $|\mathbf{z}-2+\mathbf{i}|=3$

គេបាន $|\mathbf{x}+\mathbf{iy}-2+\mathbf{i}|=3$

$$|(\mathbf{x}-2)+\mathbf{i}(\mathbf{y}+1)|=3$$

$$\sqrt{(\mathbf{x}-2)^2+(\mathbf{y}+1)^2}=3$$

ឬ $(\mathbf{x}-2)^2+(\mathbf{y}+1)^2=9$

ដូចនេះសំណុំចំនុច $\mathbf{P}$ គឺជារង្វង់ផ្ចិត $\mathbf{I}(2,-1)$ និង កាំ $\mathbf{R}=3$ ។

ឧទាហរណ៍ ៣

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{w}=\dfrac{\mathbf{z}-2+2\mathbf{i}}{\mathbf{z}+2-2\mathbf{i}}$ ហើយ $\mathbf{P}$ ជាចំនុចរូបភាពនៃ $\mathbf{z}$ ក្នុងប្លង់ $(\mathbf{xoy})$

ចូរកំណត់សំណុំចំនុច $\mathbf{P}$ ដើម្បីឱ្យ $\mathbf{w}$ ជាចំនួននិម្មិតសុទ្ធ ?

ដើម្បីឱ្យ$\mathbf{w}$ ជាចំនួននិម្មិតសុទ្ធលុះត្រាតែ $\mathbf{Re}(\mathbf{w})=\dfrac{\mathbf{w}+\overline{\mathbf{w}}}{2}=0$

នាំឱ្យ $\mathbf{w}=-\overline{\mathbf{w}}$

ដោយ $\mathbf{w}=\dfrac{\mathbf{z}-2+2\mathbf{i}}{\mathbf{z}+2-2\mathbf{i}}$ និង $\overline{\mathbf{w}}=\dfrac{\overline{\mathbf{z}}-2-2\mathbf{i}}{\overline{\mathbf{z}}+2+2\mathbf{i}}$

គេបាន $\dfrac{z-2+2i}{z+2-2i}=-\dfrac{\bar{z}-2-2i}{\bar{z}+2+2i}$ បើ $z\neq -2+2i$

$(z-2+2i)(\bar{z}+2+2i)=-(z+2-2i)(\bar{z}-2-2i)$

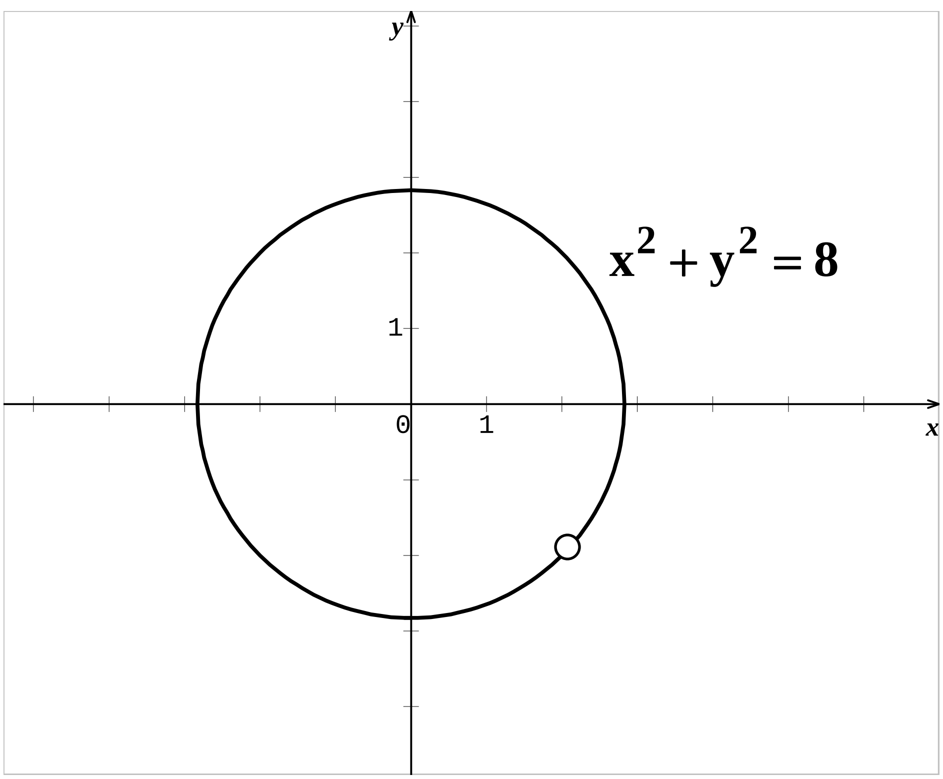
$z\bar{z}+(2+2i)z-(2-2i)\bar{z}-8=-z.\bar{z}+(2+2i)z-(2-2i)\bar{z}+8$

$2z\bar{z}=16$ ឬ $|z|^2=8$

តាង $z=x+iy$ ដែល $(x,y)\neq(-2,2)$

គេបាន $x^2+y^2=8$ ។

ដូចនេះសំណុំចំនុច P ជារង្វង់ផ្ចិត O កាំ $R=2\sqrt{2}$ លើកលែងតែចំនុច $A(-2,2)$ ។



ឧទាហរណ៍ ៤

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{z}$ ហើយ $\mathbf{P}$ ជាចំនុចរូបភាពនៃ $\mathbf{z}$ ក្នុងប្លង់ $\mathbf{(xoy)}$

ចូរកំណត់សំណុំចំនុច $\mathbf{P}$ បើគេដឹងថា $\mathbf{\arg(z-2+2i)=\frac{\pi}{4}}$ ។

តាង $\mathbf{z=x+iy}$ នោះគេបាន $\mathbf{z-2+2i=(x-2)+i(y+2)}$

ដោយ $\mathbf{\arg(z-2+2i)=\frac{\pi}{4}}$ នោះ $\mathbf{\arg((x-2)+i(y+2))=\frac{\pi}{4}}$

គេទាញបាន $\mathbf{\tan\frac{\pi}{4}=\frac{y+2}{x-2}=1}$ នាំឱ្យ $\mathbf{y=x-4}$

ដូចនេះសំណុំចំនុច $\mathbf{P}$ ជាបន្ទាត់ $\mathbf{(d):y=x-4}$

ដែល $\mathbf{\begin{cases} x-2>0 \\ y+2>0 \end{cases}}$ ឬ $\mathbf{x>2\ ,\ y>-2}$ ។

ឧទាហរណ៍ ៥

នៅក្នុងប្លង់កុំផ្លិច $\mathbf{(xoy)}$ គេឱ្យចំនុច $\mathbf{P(z)\ ,\ Q(iz)\ ,\ R(2+2i)}$

ចូរកំណត់សំណុំចំនុច $\mathbf{P}$ ដើម្បីឱ្យបីចំនុច $\mathbf{P,Q,R}$ រត់ត្រង់គ្នា ?

បីចំនុច $\mathbf{P,Q,R}$ រត់ត្រង់គ្នាលុះត្រាតែគ្រប់ $\mathbf{t\in IR:\ \overrightarrow{PQ}=t\ \overrightarrow{QR}}$

ឬ $\mathbf{z_Q-z_P=t(z_R-z_Q)}$ ។ តាង $\mathbf{z=x+iy}$ នោះ $\mathbf{z_Q=ix-y}$

គេបាន $\mathbf{ix-y-x-iy=t(2+2i-ix+y)}$

$$\mathbf{(-x-y)+i(x-y)=(2+y)t+i(2-x)t}$$

គេទាញ $\mathbf{-x-y=(2+y)t}$ និង $\mathbf{(x-y)=(2-x)t}$

គេបាន $\frac{-x-y}{x-y}=\frac{2+y}{2-x}$

ឬ $-2x+x^2-2y+xy=2x+xy-2y-y^2$

$$x^2+y^2-4x-4y=0$$

$$(x-2)^2+(y-2)^2=8$$

ដូចនេះសំណុំចំនុច P ជារង្វង់ផ្ចិត $I(2,2)$ មានកាំ $R=2\sqrt{2}$ ។

ឧទាហរណ៍ ៦

នៅក្នុងប្លង់កុំផ្លិច (xoy) គេឱ្យចំនុច P ជារូបភាពនៃ z ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $\left|\frac{z-2+2i}{z-i}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ។ ចូររកសំណុំចំនុច P ?

គេបាន $\sqrt{2}\,|z-2+2i|=|z-i|$ ដែល $z\neq i$

ឬ $2|z-2+2i|^2=|z-i|^2$ តាង $z=x+i.y$ គេបាន :

$$2|x+iy-2+2i|^2=|x+iy-i|^2$$

$$2|(x-2)+i(y+2)|^2=|x+i(y-1)|^2$$

$$2[(x-2)^2+(y+2)^2]=x^2+(y-1)^2$$

$$2x^2-8x+8+2y^2+8y+8=x^2+y^2-2y+1$$

$$x^2+y^2-8x+10y+15=0$$

$$(x-4)^2+(y+5)^2=26$$

ដូចនេះសំណុំចំនុច P ជារង្វង់ផ្ចិត $I(4,-5)$ និង កាំ $R=\sqrt{26}$ ។

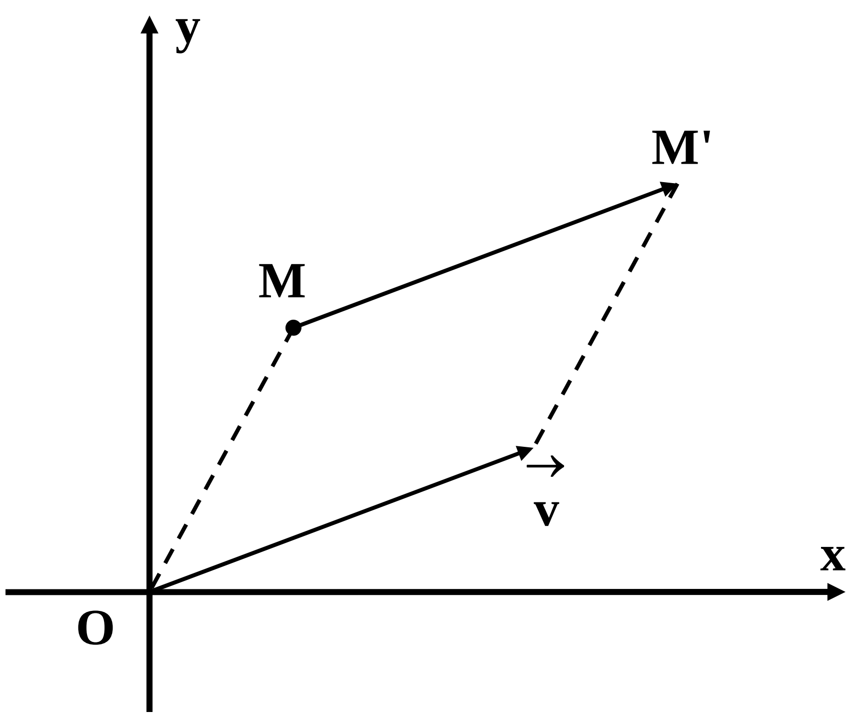
១៧_បំលែងចំនុចក្នុងប្លង់កុំផ្លិច

ក. បំលែងកិល

ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច **(xoy)** គេមានពីរចំនុច **M** និង **M'** មានអាហ្វិករៀងគ្នា **z** និង **z'**

M' ជារូបភាពនៃ **M** តាមបំលែងកិលនៃវិចទ័រ $\vec{v}(z_v)$ គេបាន :

$z' = z + z_v$ ។

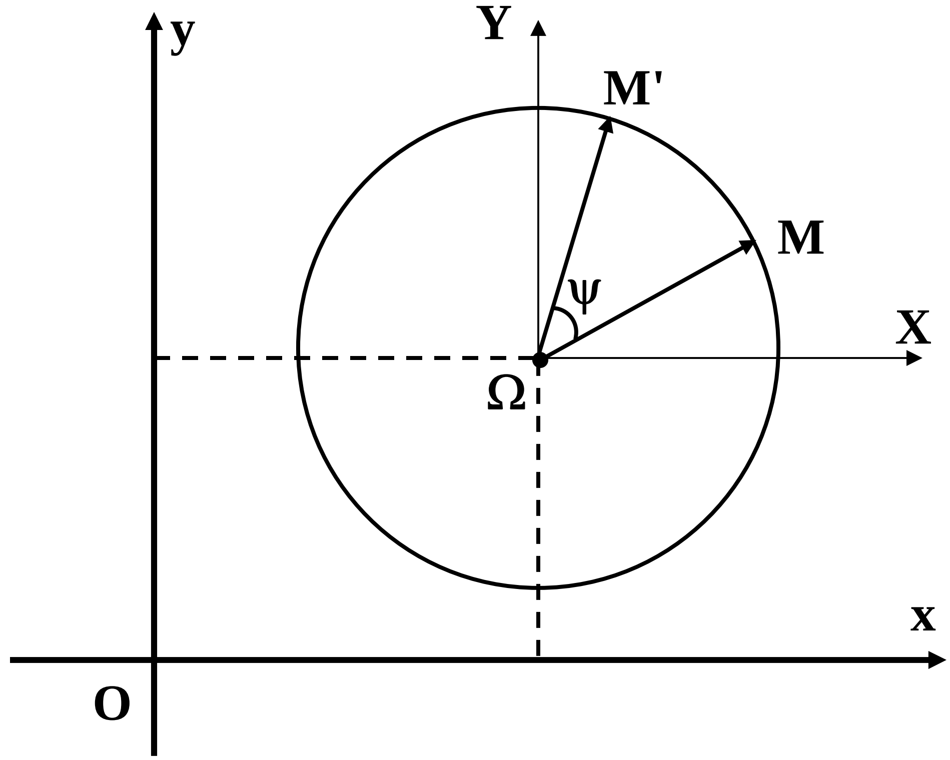


បើ **M'** ជារូបភាពនៃ **M** តាមបំលែងកិលនៃវិចទ័រ $\vec{v}(z_v)$ នោះ $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$

ដោយ $\overrightarrow{MM'}(z' - z)$ នោះ $z' - z = z_v$ ឬ $z' = z + z_v$ ។

ខ. បំលែងវិលផ្ចិត Ω

ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច **(xoy)** គេមានពីរចំនុច **M** និង **M'** មានអាហ្វិករៀងគ្នា **z** និង **z'**
M' ជារូបភាពនៃ **M** តាមបំលែងវិលផ្ចិត $\Omega(z_\Omega)$ និងមុំ ψ គេបាន :
$z'-z_\Omega=(z-z_\Omega)(\cos\psi+i\sin\psi)$ ។



បើ **M'** ជារូបភាពនៃ **M** តាមបំលែងវិលផ្ចិត $\Omega(z_\Omega)$ និងមុំ ψ

នោះគេបាន $\Omega M=\Omega M'=r$ និង $\angle M\Omega M'=\psi=\theta-\varphi$

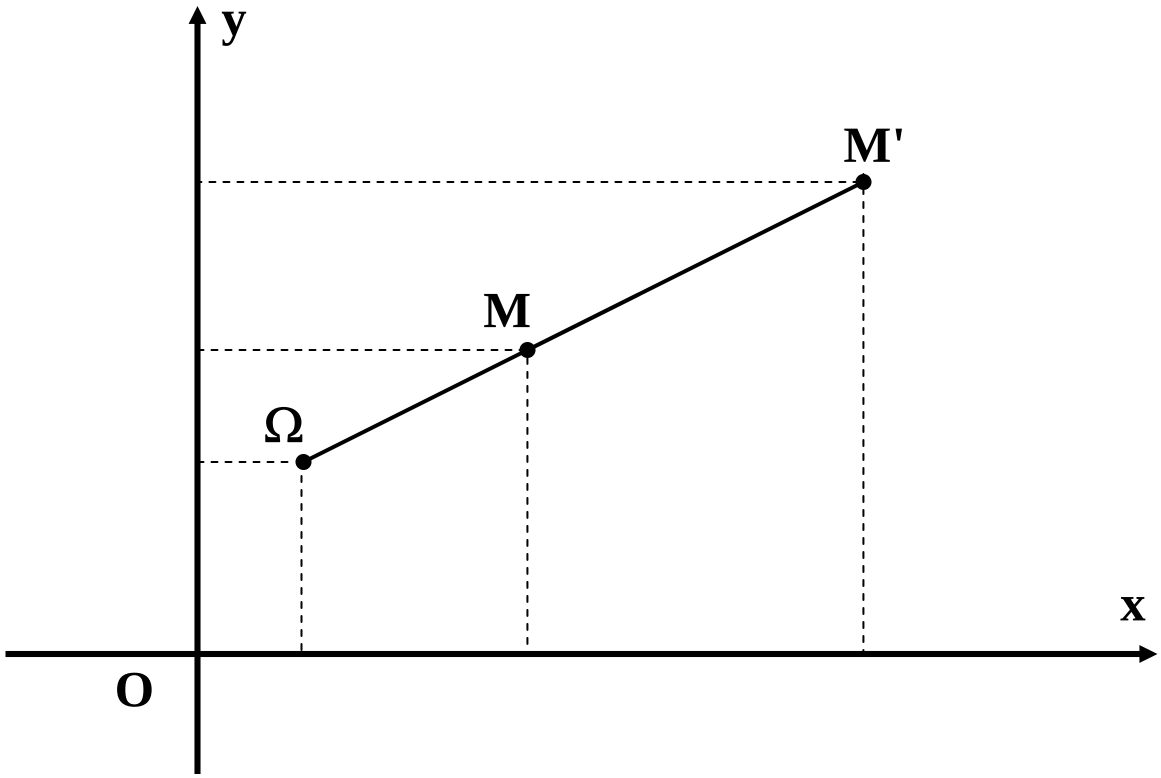
ដែល $\theta=\angle X\Omega M'$ និង $\varphi=\angle X\Omega M$ ។

ហេតុនេះ $\dfrac{z'-z_\Omega}{z-z_\Omega}=\dfrac{r.e^{i\theta}}{r.e^{i\varphi}}=e^{i\psi}$ ដែល $\psi=\theta-\varphi$

ដូចនេះ $z'-z_\Omega=(z-z_\Omega)(\cos\psi+i\sin\psi)$ ។

គ. បំលែងចាំងផ្ចិត Ω

ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច **(xoy)** គេមានពីរចំនុច **M** និង **M'** មានអាហ្វិករៀងគ្នា **z** និង **z'**
M' ជារូបភាពនៃ **M** តាមបំលែងចាំងផ្ចិត $\Omega(z_\Omega)$ ផលធៀប λ គេបាន :
$z'-z_\Omega = \lambda(z-z_\Omega)$ ។



M' ជារូបភាពនៃ **M** តាមបំលែងចាំងផ្ចិត $\Omega(z_\Omega)$ ផលធៀប λ គេបាន :

$\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda\,\overrightarrow{\Omega M}$ ដោយ $\overrightarrow{\Omega M'}(z'-z_\Omega)$; $\overrightarrow{\Omega M}(z-z_\Omega)$

ដូចនេះ $z'-z_\Omega = \lambda(z-z_\Omega)$ ។

១៨_បារីសង់នៃប្រពន្ធ័ចំណុចក្នុងប្លង់កុំផ្លិច

គេឱ្យ $(A_k , \alpha_k)_{1\le k\le n}$ ជាប្រពន្ធ័មួយមាន n ចំណុចប៉ុងដេរេ ដែលមាន

អាហ្វិក z_{A_k} ។ បើ $\sum\limits_{k=1}^{n}(\alpha_k)\neq 0$ នោះបារីសង់ G នៃប្រពន្ធ័មានអាហ្វិកមួយ

កំណត់ដោយ $z_G = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}(\alpha_k z_{A_k})}{\sum\limits_{k=1}^{n}(\alpha_k)}$ ។

តាមនិយមន័យ បើ G ជាបារីសង់នៃប្រពន្ធ័ $(A_k , \alpha_k)_{1\le k\le n}$ នោះគេបាន :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k \overrightarrow{GA_k}\right) = \overrightarrow{O}$$ ដោយ $\overrightarrow{GA_k} = \overrightarrow{OA_k} - \overrightarrow{OG}$

គេបាន $$\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k . \overrightarrow{OA_k} - \alpha_k . \overrightarrow{OG}\right) = \overrightarrow{O}$$

ឬ $$\overrightarrow{OG} . \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k) = \sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k . \overrightarrow{OA_k}\right)$$

ឬ $$z_G . \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k) = \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k z_{A_k})$$

ដូចនេះ $$z_G = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(\alpha_k z_{A_k})}{\sum\limits_{k=1}^{n}(\alpha_k)}$$ ។

ជំពូកទី២

កម្រងលំហាត់ជ្រើសរើសមានដំណោះស្រាយ

1. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 4 + 7i$ និង $z_2 = 3 + 2i$ ។

ក. ចូរគណនា $z_1 + z_2$ និង $z_1 - z_2$ ។

ខ. ចូរគណនា $z_1 \times z_2$ និង $\dfrac{z_1}{z_2}$ ។

2. គេមាន $z_1 = 1 + 2i$ និង $z_2 = 3 + i$ ។

ចូរគណនា $U = {z_1}^2 + {z_2}^2$ និង $V = {z_1}^3 + {z_2}^3$?

3. ចូរកំនត់ចំនួនពិត p និង q ដើម្បីឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = 3 + 2i$ ជាឬសរបស់សមីការ $z^2 + ipz + q = 0$ ។

4. កំនត់ពីរចំនួនពិត x និង y បើគេដឹងថា :

$$(3+i)(1+ix)+(1-3i)(3+2iy)=\frac{2(7+9i)}{1+i}$$ ។

5. ចូរគណនាឬសការេនៃ $z = 40 + 42i$ ។

6. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $a = 2 + 3i$; $b = -3 + i$ និង $c = 1 - 4i$

ក-ចូរសរសេរ $a^3 + b^3 + c^3$ និង $a \times b \times c$ ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ខ-ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថាគេអាចកំនត់ចំនួនពិត k ដើម្បីឱ្យ $a^3 + b^3 + c^3 = k.abc$

7. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{a = 3 + i}$; $\mathbf{u = (x-1) + i.(y+2)}$ និង $\mathbf{b = 2 - 16i}$

ដែល $\mathbf{x}$ និង $\mathbf{y}$ ជាពីរចំនួនពិត ។

ចូរកំនត់តម្លៃ $\mathbf{x}$ និង $\mathbf{y}$ ដើម្បីឱ្យ $\mathbf{au + b = 0}$ ។

8. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{Z = \log_3(\frac{x+y}{2}) + i\left(\log_2 x + \log_2 y\right)}$

និង $\mathbf{W = \frac{13+i}{1-2i}}$ ដែល $\mathbf{x \in IR_+^*}$; $\mathbf{y \in IR_+^*}$ ។

ក-ចូរសរសេរ $\mathbf{W}$ ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ខ-កំនត់ $\mathbf{x}$ និង $\mathbf{y}$ ដើម្បីឱ្យ $\mathbf{Z = W}$ ។

9.គេឱ្យសមីការ $\mathbf{(E): z^2 + az + b = 0}$ ដែល $\mathbf{a;b \in IR}$

ចូរកំនត់តម្លៃ $\mathbf{a}$ និង $\mathbf{b}$ ដើម្បីឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{z_1 = 2 + i\sqrt{3}}$ ជាឬសរបស់

សមីការ $\mathbf{(E)}$ រួចទាញរកឬស $\mathbf{z_2}$ មួយទៀតរបស់សមីការ ។

តើអ្នកពិនិត្យឃើញដូចម្តេចចំពោះចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{z_1}$ និង $\mathbf{z_2}$?

10. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{z}$ ដែលមាន $\mathbf{\overline{z}}$ ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់របស់វា ។

ដោះស្រាយសមីការ $\mathbf{\log_5 |z| + \frac{z + i\,\overline{z}}{7} = 3 + i}$

11. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិចពីរ :

$$\mathbf{z = 3x - i\,(2x - y)} \text{ និង } \mathbf{W = -1 + y + i\,[\ 1 + 2^{\log_5(x+3)}\ ]}$$

ដែល $\mathbf{x}$ និង $\mathbf{y}$ ជាចំនួនពិត ។ កំនត់ $\mathbf{x}$ និង $\mathbf{y}$ ដើម្បីឱ្យ $\mathbf{W = z}$ ។

12. ដោះស្រាយសមីការ $2z-|z|=\dfrac{9-7i}{1+i}$

ដែល z ជាចំនួនកុំផ្លិច ។

13. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិចពីរ Z_1 និង Z_2 ដែល $Z_2 \neq 0$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\left|\dfrac{Z_1}{Z_2}\right| = \dfrac{|Z_1|}{|Z_2|}$ ។

14. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិចពីរ Z_1 និង Z_2 ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $|Z_1 \times Z_2| = |Z_1| \times |Z_2|$ ។

15. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិចពីរ Z_1 និង Z_2 ។

ក. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $|Z_1+Z_2| \leq |Z_1|+|Z_2|$

ខ. ទាញឱ្យបានថា $\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \leq \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}$

ចំពោះគ្រប់ a,b,c,d ជាចំនួនពិត ។

16. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច : $z_1 = \dfrac{\sqrt{6}-i.\sqrt{2}}{2}$ និង $z_2 = 1-i$

ក.ចូរសរសេរ z_1 ,z_2 និង $Z=\dfrac{z_1}{z_2}$ ជារាងត្រីកោណមាត្រ ។

ខ.ចូរសរសេរ $Z=\dfrac{z_1}{z_2}$ ជារាងពិជគណិត ។

គ.ទាញឱ្យបានថា $\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ និង $\sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ។

17. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=\sqrt{2+\sqrt{2}}+i.\sqrt{2-\sqrt{2}}$ ។

ក-ចូរសរសេរ z^2 ជាទំរង់ពិជគណិត ។

ខ-ចូរសរសេរ z^2 និង z ជាទំរង់ត្រីកោណមាត្រ ។

គ-ទាញរកតំលៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{\pi}{8}$ និង $\sin\frac{\pi}{8}$ ។

18. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=\cos\frac{4\pi}{5}+i.\sin\frac{4\pi}{5}$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $(1+Z)^3=8\cos^3\frac{2\pi}{5}(\cos\frac{6\pi}{5}+i.\sin\frac{6\pi}{5})$ ។

19. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=4\sqrt{2}(-1+i)$

ក-ចូរសរសេរ Z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ខ-គណនាឫសទី3 នៃ Z ។

20. គេអោយ $f(z)=z^3-2(\sqrt{3}+i).z^2+4(1+i\sqrt{3}).z-8i$

ក.ចូរបង្ហាញថា $\forall z\in ¢$ $f(z)=(z-2i)(z^2-2\sqrt{3}z+4)$

ខ.ដោះស្រាយសមីការ $f(z)=0$ ក្នុងសំណុំកុំផ្លិច ។

21. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=\cos\frac{4\pi}{7}+i.\sin\frac{4\pi}{7}$ ។

ចូរសរសេរ $(1+z)^4$ ជារាងត្រីកោណមាត្រ ។

22. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 1 + i$ និង $z_2 = \frac{\sqrt{6} + i.\sqrt{2}}{2}$

ក-ចូរសរសេរ z_1 ,z_2 និង $\frac{z_1}{z_2}$ ជាទំរង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ខ-ចូរសរសេរ $\frac{z_1}{z_2}$ ជាទំរង់ពិជគណិត ។

គ-ប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរទាញរកតំលៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}$ ។

23. គេឱ្យស៊្វីតនៃចំនួនកុំផ្លិច (Z_n) កំនត់ដោយ

$$\begin{cases} Z_0 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \\ Z_{n+1} = \frac{1}{2}\left(Z_n + |Z_n| \right) ; n \in IN \end{cases}$$

($|Z_n|$ ជាម៉ូឌុលនៃ Z_n) ។

សន្មតថា $Z_n = \rho_n(\cos\theta_n + i.\sin\theta_n)$, $\forall n \in IN$

ដែល $\rho_n > 0$, $\rho_n ; \theta_n \in IR$ ។

ក-ចូររកទំនាក់ទំនងរវាង θ_n និង θ_{n+1} ហើយ ρ_n និង ρ_{n+1} ។

ខ-រកប្រភេទនៃស៊្វីត (θ_n) រួចគណនា θ_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ-ចូរបង្ហាញថា $\rho_n = \rho_0 \cos\theta_0 \cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}....\cos\frac{\theta_{n-1}}{2}$

រួចបញ្ជាក់ ρ_n អនុគមន៍នៃ n ។

24. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{z = x + i.y}$ ដែល $\mathbf{x}$ និង $\mathbf{y}$ ជាពីរចំនួនពិត ។

ចូរកំនត់តម្លៃ $\mathbf{x}$ និង $\mathbf{y}$ បើគេដឹងថា :

$$(3+2i)z + (1+3i)\bar{z} = \frac{10}{2-i}$$ ($\bar{z}$ ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ z) ។

25. គេឱ្យ z_1 ; z_2 ជាចំនួនកុំផ្លិចដែល $|z_1| = |z_2| = r > 0$ ។

បង្ហាញថា $\left(\frac{z_1+z_2}{r^2+z_1z_2}\right)^2 + \left(\frac{z_1-z_2}{r^2-z_1z_2}\right)^2 \geq \frac{1}{r^2}$

26.**គេយក** z_1 ; z_2 ; ....; z_n **ជាចំនួនកុំផ្លិចដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង**

$$(k+1)z_{k+1} - i(n-k)z_k = 0 \ ; \ k = 0 , 1 , 2 , \dots , n-1$$

ក-កំនត់ z_0 **បើគេដឹងថា** $z_0 + z_1 + z_2 + ... + z_n = 2^n$

ខ-ចំពោះតម្លៃ z_0 **ដែលបានកំនត់ខាងលើចូរបង្ហាញថា :**

$$|z_0|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2 + ... + |z_n|^2 < \frac{(3n+1)^n}{n!}$$

27. **គេឱ្យ** z_1 ; z_2 ; z_3 **ជាចំនួនកុំផ្លិចដោយដឹងថា :**

$$z_1 + z_2 + z_3 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = 0$$ ។

ចូរបង្ហាញថា $|z_1| = |z_2| = |z_3|$

28. **ចូរបង្ហាញថា** $\left|\frac{6z-i}{2+3iz}\right| \leq 1$ **លុះត្រាតែ** $|z| \leq \frac{1}{3}$

29. គេឱ្យ z_1 ; z_2 ; z_3 ; ....; z_n ជាចំនួនកុំផ្លិចដែលមានម៉ូឌុលស្មើ 1 ។

គេតាង $Z=\left(\sum_{k=1}^{n}(z_k)\right)\times\left(\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{z_k})\right)$ ។

ចូរបង្ហាញថា $0\le Z\le n^2$

30. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច z ដែល $|z|=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$\sqrt{2}\le|1-z|+|1+z^2|\le 4$ ។

31. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x})+i.(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x})$

ដែល x ជាចំនួនពិត។

ចូរកំនត់រកម៉ូឌុលអប្បបរមានៃចំនួនកុំផ្លិចនេះ ?

32. គេឱ្យ $A=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+i\right)^n-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-i\right)^n$, $n\in IN$ ។

ចូរបង្ហាញថា $A=i.\frac{2^{n+1}}{(\sqrt{3})^n}.\sin\frac{n\pi}{3}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$ ។

33. ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច $(O,\vec{i},\vec{j})$ គេឱ្យបួនចំនុច A , B , C ,D

ដែលមានអាហ្វិករៀងគ្នា

$Z_A=1+6i$, $Z_B=4+5i$, $Z_C=5+4i$ និង $Z_D=-2-3i$ ។

ចូរស្រាយថាចតុកោណ ABCD ចារិកក្នុងរង្វង់មួយដែលគេនឹងបញ្ជាក់ផ្ចិត

និង កាំរបស់វា ។

34. គេឱ្យ z_1 និង z_2 ជាពីរចំនួនកុំផ្លិច ។

ចូរបង្ហាញថា $|1+z_1z_2|+|z_1+z_2|\geq\sqrt{|z_1{}^2-1||z_2{}^2-1|}$

35. **គេឲ្យ z_1 និង z_2 ជាចំនួនកុំផ្លិចពីរ ។**

ចូរស្រាយថា $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$

36.**គេឲ្យ z_1 និង z_2 ជាចំនួនកុំផ្លិចពីរដែល $|z_1|=|z_2|=1$**

និង $z_1.z_2\neq-1$ ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ ជាចំនួនពិតមួយ ។

37. **គេឲ្យពហុធា $P(x)=(x\sin a+\cos a)^n$ ដែល $n\in IN^*$**

ចូររកសំណល់នៃវិធីចែករវាង $P(x)$ នឹង x^2+1 ។

38. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=\sqrt{2+\cos\varphi}+i\sqrt{2+\sin\varphi}$

ដែល $\varphi\in IR$ ។

ក្នុងប្លង់កំផ្លិច $(o,\vec{i},\vec{j})$ គេហៅ M ជាចំនុចរូបភាពនៃ z ។

ចូរកំណត់តម្លៃតូចបំផុត និង ធំបំផុតនៃ $r=OM$?

39. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច z_1,z_2,z_3 ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង :

$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ និង $\dfrac{z_1{}^2}{z_2z_3}+\dfrac{z_2{}^2}{z_1z_3}+\dfrac{z_3{}^2}{z_1z_2}+1=0$

ចូរស្រាយថា $|z_1+z_2+z_3|\in\{1,2\}$ ។

40. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច z_1 និង z_2 ដែល $|z_1|=|z_2|=1$

ចូរស្រាយថា $|z_1+1|+|z_2+1|+|z_1z_2+1|\geq 2$

41. គេឱ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (a_n) កំណត់ដោយ :

$$\begin{cases} a_1=1\ ,\ a_2=1 \\ a_{n+2}=a_{n+1}-a_n\ \ ,\ n=1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ldots \end{cases}$$

គេតាងស្វ៊ីតចំនួនកុំផ្លិច $z_n=a_{n+1}-\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}a_n$ ។

ក. ចូរស្រាយថា $z_{n+1}=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 1$ ។

ខ. ចូរដាក់ $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្ររួចទាញរក z_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ. ទាញរកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត a_n ។ តើ (a_n) ជាស្វ៊ីតខួបឬទេ ?

42. គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិច (z_n) កំណត់ដោយ :

$z_1=\dfrac{2+\sqrt{3}+i}{2}$ និង $z_{n+1}=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}z_n+\dfrac{2-\sqrt{3}-i}{2}$

ដែល $n=1\ ,\ 2\ ,3\ ,\ldots$ ។

ក. តាង $w_n=z_n-1$ ។

បង្ហាញថា (w_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច

រួចគណនា w_n ជាអនុគមន៍នៃ n ដោយសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ខ. ទាញបង្ហាញថា $z_n = 2\cos\frac{n\pi}{12}(\cos\frac{n\pi}{12} + i\sin\frac{n\pi}{12})$ ។

43. គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) និង (v_n) កំណត់ដោយ :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ v_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ និង } \begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n - v_n}{\sqrt{2}} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{\sqrt{2}} \end{cases} \text{ ដែល } n \geq 1$$

ក. គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិច $z_n = u_n + i.v_n$ ។

ចូរស្រាយថា (z_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច រួចគណនា z_n ជាអនុគមន៍នៃ n ដោយសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ខ. សំដែង u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

44. គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) និង (v_n) កំណត់ដោយ :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = \sqrt{3} \end{cases} \text{ និង } \begin{cases} u_{n+1} = {u_n}^2 - {v_n}^2 \\ v_{n+1} = 2u_n v_n \end{cases} \text{ ដែល } n \geq 0$$

ក. គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិច $z_n = u_n + i.v_n$ ។

ចូរស្រាយថា $z_{n+1} = {z_n}^2$ រួចទាញថា $z_n = {z_0}^{2^n}$ ។

ខ. សំដែង u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

លំហាត់ទី១

គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 4 + 7i$ និង $z_2 = 3 + 2i$ ។

ក. ចូរគណនា $z_1 + z_2$ និង $z_1 - z_2$ ។

ខ. ចូរគណនា $z_1 \times z_2$ និង $\dfrac{z_1}{z_2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនា $z_1 + z_2$ និង $z_1 - z_2$

យើងបាន $z_1 + z_2 = (4 + 7i) + (3 + 2i) = 4 + 7i + 3 + 2i = 7 + 9i$

និង $z_1 - z_2 = (4 + 7i) - (3 + 2i) = 4 + 7i - 3 - 2i = 1 + 5i$

ដូចនេះ $\boxed{z_1 + z_2 = 7 + 9i}$ និង $\boxed{z_1 - z_2 = 1 + 5i}$ ។

ខ. គណនា $z_1 \times z_2$ និង $\dfrac{z_1}{z_2}$

យើងបាន $z_1 \times z_2 = (4 + 7i)(3 + 2i) = 12 + 8i + 21i - 14 = -2 + 29i$

និង $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{4 + 7i}{3 + 2i} = \dfrac{(4 + 7i)(3 - 2i)}{(3 + 2i)(3 - 2i)} = \dfrac{12 - 8i + 21i + 14}{3 + 4} = \dfrac{26 + 13i}{13} = 2 + i$

ដូចនេះ $\boxed{z_1 \times z_2 = -2 + 29i}$ និង $\boxed{\dfrac{z_1}{z_2} = 2 + i}$ ។

លំហាត់ទី២

គេមាន $z_1 = 1 + 2i$ និង $z_2 = 3 + i$ ។

ចូរគណនា $U = z_1^2 + z_2^2$ និង $V = z_1^3 + z_2^3$?

ដំណោះស្រាយ

គណនា $U = z_1^2 + z_2^2$ និង $V = z_1^3 + z_2^3$

យើងបាន :

$$U = (1+2i)^2 + (3+i)^2$$
$$= 1 + 4i - 4 + 9 + 6i - 1$$
$$= 5 + 10i$$
$$V = (1+2i)^3 + (3+i)^3$$
$$= 1 + 6i - 12 - 8i + 27 + 27i - 9 - i$$
$$= 7 + 24i$$

ដូចនេះ $\boxed{U = 5 + 10i}$ និង $\boxed{V = 7 + 24i}$ ។

លំហាត់ទី៣

ចូរកំនត់ចំនួនពិត $\mathbf{p}$ និង $\mathbf{q}$ ដើម្បីឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{z = 3 + 2i}$

ជាឫសរបស់សមីការ $\mathbf{z^2 + ipz + q = 0}$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់ចំនួនពិត $\mathbf{p}$ និង $\mathbf{q}$

បើ $\mathbf{z = 3 + 2i}$ ជាឫសរបស់សមីការ $\mathbf{z^2 + ipz + q = 0}$ នោះវាត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ

គេបាន $\mathbf{(3 + 2i)^2 + ip(3 + 2i) + q = 0}$

$$\mathbf{9 + 12i - 4 + 3ip - 2p + q = 0}$$

$$\mathbf{(5 - 2p + q) + i.(12 + 3p) = 0}$$

គេទាញបាន $\begin{cases} \mathbf{5 - 2p + q = 0} \\ \mathbf{12 + 3p = 0} \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} \mathbf{q = 2p - 5 = -13} \\ \mathbf{p = -4} \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{\mathbf{p = -4 \ , \ q = -13}}$ ។

លំហាត់ទី៤

កំនត់ពីរចំនួនពិត $\mathbf{x}$ និង $\mathbf{y}$ បើគេដឹងថា :

$$(3+i)(1+ix)+(1-3i)(3+2iy)=\frac{2(7+9i)}{1+i}$$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់ពីរចំនួនពិត $\mathbf{x}$ និង $\mathbf{y}$

គេមាន $(3+i)(1+ix)+(1-3i)(3+2iy)=\frac{2(7+9i)}{1+i}$

គេបាន $3+3ix+i-x+3+2iy-9i+6y=\frac{2(7+9i)(1-i)}{1+1}$

$$(-x+6y+6)+(3ix+2iy-8i)=\frac{2(7-7i+9i+9)}{2}$$

$$(-x+6y+6)+i.(3x+2y-8)=16+2i$$

គេទាញ $\begin{cases}-x+6y+6=16\\3x+2y-8=2\end{cases}$

ឬ $\begin{cases}-x+6y=10\\3x+2y=10\end{cases}$ នាំឱ្យ $x=2$, $y=2$ ។

ដូចនេះ $x=2$, $y=2$ ។

លំហាត់ទី៥

ចូរគណនាឫសការេនៃ $z = 40 + 42i$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $W = x + i.y$, $x;y \in IR$ ជាឫសការេនៃ $z = 40 + 42i$

គេបាន $W^2 = z$ ដោយ $W^2 = (x + i.y)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$

នាំឱ្យ $(x^2 - y^2) + 2ixy = 40 + 42.i$ គេទាញ $\begin{cases} x^2 - y^2 = 40 \\ 2xy = 42 \end{cases}$

ដោយ $\left(x^2 + y^2\right)^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = 40^2 + 42^2 = 3364$

គេទាញ $x^2 + y^2 = \sqrt{3364} = 58$ ។

គេបានប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 58 \ (1) \\ x^2 - y^2 = 40 \ (2) \end{cases}$

បូកសមីការ (1) និង (2) គេបាន $2x^2 = 98$ នាំឱ្យ $x = \pm 7$

ដកសមីការ(1) និង (2) គេបាន $2y^2 = 18$ នាំឱ្យ $y = \pm 3$

ដោយ $2xy = 42 > 0$ នាំឱ្យ x និង y មានសញ្ញាដូចគ្នា នាំឱ្យគេទាញបានគូចម្លើយ :

$x = 7$, $y = 3$ និង $x = -7$, $y = -3$ ។

$\boxed{\text{ដូចនេះ } W_1 = 7 + 3i \text{ និង } W_2 = -7 - 3i}$ ។

លំហាត់ទី៦

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{a = 2 + 3i}$; $\mathbf{b = -3 + i}$ និង $\mathbf{c = 1 - 4i}$

ក-ចូរសរសេរ $\mathbf{a^3 + b^3 + c^3}$ និង $\mathbf{a \times b \times c}$ ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ខ-ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថាគេអាចកំនត់ចំនួនពិត $\mathbf{k}$ ដើម្បីឱ្យ $\mathbf{a^3 + b^3 + c^3 = k.abc}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.សរសេរ $\mathbf{a^3 + b^3 + c^3}$ និង $\mathbf{a \times b \times c}$ ជាទម្រង់ពីជគណិត ៖

យើងមាន $\mathbf{a^3 = (2+3i)^3 = 8 + 36i - 54 - 27i = -46 + 9i}$

$$\mathbf{b^3 = (-3+i)^3 = -27 + 27i + 9 - i = -18 + 26i}$$

$$\mathbf{c^3 = (1-4i)^3 = 1 - 12i - 48 + 64i = -47 + 52i}$$

យើងបាន

$$\mathbf{a^3 + b^3 + c^3 = -46 + 9i - 18 + 26i - 47 + 52i}$$
$$\mathbf{= -111 + 87i}$$

ដូចនេះ $\boxed{\mathbf{a^3 + b^3 + c^3 = -111 + 87i}}$ ។

យើងមាន $\mathbf{a \times b \times c = (2 + 3i)(-3 + i)(1 - 4i)}$

$$\mathbf{= (-6 + 2i - 9i - 3)(1 - 4i)}$$
$$\mathbf{= (-9 - 7i)(1 - 4i) = -9 + 36i - 7i - 28}$$
$$\mathbf{= -37 + 29i}$$

ដូចនេះ $\boxed{\mathbf{a \times b \times c = -37 + 29i}}$ ។

ខ.កំនត់ចំនួនពិត $\mathbf{k}$

យើងមាន $\mathbf{a^3+b^3+c^3=k\,.abc}$

គេទាញ $\mathbf{k=\dfrac{a^3+b^3+c^3}{a.b.c}=\dfrac{-111+87i}{-37+29i}=3}$

ដូចនេះ $\mathbf{k=3}$ ។

លំហាត់ទី៧

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{a = 3 + i \;\; ; \; u = (x-1) + i.(y+2)}$ និង $\mathbf{b = 2 - 16i}$

ដែល $\mathbf{x}$ និង $\mathbf{y}$ ជាពីរចំនួនពិត ។

ចូរកំនត់តម្លៃ $\mathbf{x}$ និង $\mathbf{y}$ ដើម្បីឱ្យ $\mathbf{au + b = 0}$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់តម្លៃនៃ $\mathbf{x}$ និង $\mathbf{y}$

យើងបាន $\mathbf{au + b = 0}$

$$\mathbf{u = -\frac{b}{a}}$$

ដោយ $\mathbf{a = 3 + i \;\; ; \; u = (x-1) + i.(y+2)}$ និង $\mathbf{b = 2 - 16i}$

គេបាន $\mathbf{(x-1) + i.(y+2) = -\dfrac{2-16i}{3+i}}$

$$\mathbf{(x-1) + i(y+2) = -\frac{2(1-8i)(3-i)}{3^2 - i^2}}$$

$$\mathbf{(x-1) + i(y+2) = -\frac{2(3 - i - 24i - 8)}{10}}$$

$$\mathbf{(x-1) + i(y+2) = 1 + 5i}$$

គេទាញបាន $\mathbf{\begin{cases} x - 1 = 1 \\ y + 2 = 5 \end{cases}}$ នាំឱ្យ $\mathbf{x = 2 \;\; ; \; y = 3}$

ដូចនេះ $\boxed{\mathbf{x = 2 \;\; ; \; y = 3}}$ ។

លំហាត់ទី៨

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=\log_3(\frac{x+y}{2})+i\left(\log_2 x+\log_2 y\right)$ និង $W=\frac{13+i}{1-2i}$

ដែល $x\in IR_+^*$; $y\in IR_+^*$ ។

ក-ចូរសរសេរ W ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ខ-កំនត់ x និង y ដើម្បីឱ្យ $Z=W$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-សរសេរ w ជាទម្រង់ពីជគណិត

យើងបាន $W=\frac{12+i}{1-2i}=\frac{(12+i)(1+2i)}{1+4}=\frac{12+24i+i-2}{5}=2+5i$

ដូចនេះ $\boxed{W=2+5i}$ ។

ខ-កំនត់ x និង y ដើម្បីឱ្យ $Z=W$

យើងបាន $Z=W$ សមមូល $\begin{cases}\log_2(\frac{x+y}{3})=2\\ \log_2 x+\log_2 y=5\end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases}x+y=12\\ x.y\ \ =32\end{cases}$

គេទាញ x ; y ជាឫសសមីការ $u^2-12u+32=0$

ដោយ $\Delta'=36-32=4$ គេទាញឫស $\left[\begin{array}{l}u_1=6-2=4\\ u_2=6+2=8\end{array}\right.$

ដូចនេះ $x=4$; $y=8$ ឬ $x=8$; $y=4$ ។

លំហាត់ទី៩

គេឱ្យសមីការ $(E): z^2 + az + b = 0$ ដែល $a;b \in IR$

ចូរកំនត់តម្លៃ a និង b ដើម្បីឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 2 + i\sqrt{3}$ ជាឬសរបស់

សមីការ (E) រួចទាញរកឬស z_2 មួយទៀតរបស់សមីការ ។

តើអ្នកពិនិត្យឃើញដូចម្តេចចំពោះចំនួនកុំផ្លិច z_1 និង z_2 ?

ដំណោះស្រាយ

កំនត់តម្លៃ a និង b

ដើម្បីឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $2 + i\sqrt{3}$ ជាឬសរបស់សមីការលុះត្រាតែវាផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ

គេបាន $(2 + i\sqrt{3})^2 + a(2 + i\sqrt{3}) + b = 0$

$$4 + 4i\sqrt{3} - 3 + 2a + ai\sqrt{3} + b = 0$$

$$(1 + 2a + b) + i(4\sqrt{3} + a\sqrt{3}) = 0$$

គេទាញបាន $\begin{cases} 4\sqrt{3} + a\sqrt{3} = 0 \\ 1 + 2a + b = 0 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} a = -4 \\ b = 7 \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{a = -4 \; ; \; b = 7}$ ។

គណនាឬសមួយទៀតរបស់សមីការ :

បើ z_1 ; z_2 ជាឬសរបស់សមីការនោះតាមទ្រឹស្តីបទវ្យែតគេបាន :

$z_1 + z_2 = -a = 4$ គេទាញ $z_2 = 4 - (2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$

ដូចនេះ $z_2 = 2 - i\sqrt{3}$ ។ យើងពិនិត្យឃើញថាចំនួនកុំផ្លិច z_1 និង z_2 ឆ្លាស់គ្នា ។

លំហាត់ទី១០

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{z}$ ដែលមាន $\overline{\mathbf{z}}$ ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់របស់វា ។

ដោះស្រាយសមីការ $\log_5|z| + \dfrac{z + i\,\overline{z}}{7} = 3 + i$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ $\log_5|z| + \dfrac{z + i\overline{z}}{7} = 3 + i$

តាង $z = x + i.y$ នាំឱ្យ $\overline{z} = x - iy$ ដែល $x\,;\,y \in IR$

សមីការអាចសរសេរ :

$$\log_5|x + iy| + \frac{(x + iy) + i(x - iy)}{7} = 3 + i$$

$$\log_5\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{x + iy + ix + y}{7} = 3 + i$$

$$\left(\frac{x + y}{7} + \log_5\sqrt{x^2 + y^2}\right) + i\,\frac{x + y}{7} = 3 + i$$

គេទាញបាន $\begin{cases} \dfrac{x + y}{7} = 1 \\ \dfrac{x + y}{7} + \log_5\sqrt{x^2 + y^2} = 3 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} x + y = 7 \\ 1 + \log_5\sqrt{x^2 + y^2} = 3 \end{cases}$

ឬ $\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$ គេទាញចម្លើយ $x = 3\ ,\ y = 4$ ឬ $x = 4\ ,\ y = 3$ ។

ដូចនេះ $z_1 = 3 + 4i\ \ ;\ z_2 = 4 + 3i$ ជាចម្លើយរបស់សមីការ ។

លំហាត់ទី១១

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិចពីរ :

$\mathbf{z = 3x - i\,(2x - y)}$ និង $\mathbf{W = -1 + y + i\,[\;1 + 2^{\log_5(x+3)}\;]}$

ដែល $\mathbf{x}$ និង $\mathbf{y}$ ជាចំនួនពិត ។ កំនត់ $\mathbf{x}$ និង $\mathbf{y}$ ដើម្បីឱ្យ $\mathbf{W = z}$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់ $\mathbf{x}$ និង $\mathbf{y}$

ដើម្បីឱ្យ $\mathbf{W = z}$ លុះត្រាតែ $\begin{cases} \mathbf{Re(W) = Re(z)} \\ \mathbf{Im(W) = Im(z)} \end{cases}$

គេទាញបាន $\begin{cases} \mathbf{-1 + y = 3x} & \mathbf{(1)} \\ \mathbf{1 + 2^{\log_5(x+3)} = -2x + y} & \mathbf{(2)} \end{cases}$

តាម $\mathbf{(1)}$ គេទាញ $\mathbf{y = 3x + 1}$ $\mathbf{(3)}$យកជួសក្នុងសមីការ $\mathbf{(2)}$

គេបាន $\mathbf{1 + 2^{\log_5(x+3)} = -2x + 3x + 1}$

$\mathbf{2^{\log_5(x+3)} = x}$ លក្ខខ័ណ្ឌ $\mathbf{x + 3 > 0}$ ឬ $x > -3$

តាង $\mathbf{t = \log_5(x + 3)}$ នាំឱ្យ $\mathbf{x + 3 = 5^t}$ ឬ $\mathbf{x = 5^t - 3}$

គេបាន សមីការ $\mathbf{2^t = 5^t - 3}$ ឬ $\mathbf{5^t - 2^t = 3}$

ដោយអង្គខាងឆ្វេងនៃសមីការជាអនុគមន៍កើន និង អង្គខាងស្តាំជាអនុគមន៍ថេរ

នោះយើងបានសមីការមានឬសតែមួយគត់គឺ $\mathbf{t = 1}$ ។

ចំពោះ $\mathbf{t = 1}$ គេបាន $\mathbf{x = 5 - 3 = 2}$ និង $\mathbf{y = 3(2) + 1 = 7}$

ដូចនេះ $\mathbf{x = 2\,;\; y = 7}$ ។

លំហាត់ទី១២

ដោះស្រាយសមីការ $2z-|z|=\frac{9-7i}{1+i}$

ដែល z ជាចំនួនកុំផ្លិច ។

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ

$2z-|z|=\frac{9-7i}{1+i}$ តាង $z=x+i.y\ ,\ x;y\in IR$

គេបាន $2(x+iy)-|x+iy|=\frac{(9-7i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$

$$2x+2iy-\sqrt{x^2+y^2}=\frac{9-9i-7i-7}{2}$$

$$(2x-\sqrt{x^2+y^2})+2iy=1-8i$$

គេទាញ $\begin{cases} 2x-\sqrt{x^2+y^2}=1 & (1) \\ 2y=-8 & (2) \end{cases}$

តាម (2) គេទាញ $y=-4$ យកទៅជួសក្នុង (1) គេបាន

$2x-\sqrt{x^2+16}=1$

$$2x-1=\sqrt{x^2+16}\quad ,\ x>-\frac{1}{2}$$

$$(2x-1)^2=x^2+16$$

$$4x^2-4x+1=x^2+16$$

$$3x^2-4x-15=0\quad ;\ \Delta'=4+45=7^2$$

គេទាញឫស $x_1 = \frac{2+7}{3} = 3$; $x_2 = \frac{2-7}{3} = -\frac{5}{3} < -\frac{1}{2}$ (មិនយក)

គេបាន $x = 3$; $y = -4$ ។

ដូចនេះ $\boxed{z = 3 - 4i}$ ជាចម្លើយរបស់សមីការ ។

លំហាត់ទី១៣

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិចពីរ Z_1 និង Z_2 ដែល $Z_2 \neq 0$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\left|\dfrac{Z_1}{Z_2}\right| = \dfrac{|Z_1|}{|Z_2|}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\left|\dfrac{Z_1}{Z_2}\right| = \dfrac{|Z_1|}{|Z_2|}$

យើងតាង $Z_1 = a + i.b$ និង $Z_2 = c + i.d$ ដែល a, b, c, d ជាចំនួនពិត ។

យើងបាន $\dfrac{Z_1}{Z_2} = \dfrac{a+i.b}{c+i.d} = \dfrac{(a+i.b)(c-i.d)}{(c+i.d)(c-i.d)} = \dfrac{ac - i.ad + i.bc - i^2.bd}{c^2 - i^2.d^2}$

គេបាន $\dfrac{Z_1}{Z_2} = \dfrac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2} = \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} + i.\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}$

នាំឱ្យ

$$\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \sqrt{\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)^2 + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{(ac+bd)^2 + (bc-ad)^2}}{c^2+d^2}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd + a^2d^2}}{c^2+d^2}$$

$$= \frac{\sqrt{(a^2c^2 + a^2d^2) + (b^2c^2 + b^2d^2)}}{c^2+d^2}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2(c^2+d^2) + b^2(c^2+d^2)}}{c^2+d^2} = \frac{\sqrt{(c^2+d^2)(a^2+b^2)}}{c^2+d^2}$$

គេទាញ $\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \sqrt{\frac{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}{(c^2+d^2)^2}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}$

ដោយគេមាន $\begin{cases} |Z_1| = \sqrt{a^2+b^2} \\ |Z_2| = \sqrt{c^2+d^2} \end{cases}$

ដូច្នេះ $\boxed{\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}}$ ។

លំហាត់ទី១៤

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិចពីរ Z_1 និង Z_2 ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $|Z_1 \times Z_2| = |Z_1| \times |Z_2|$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $|Z_1 \times Z_2| = |Z_1| \times |Z_2|$

យើងតាង $Z_1 = a + i.b$ និង $Z_2 = c + i.d$ ដែល a, b, c, d ជាចំនួនពិត ។

យើងមាន $Z_1 \times Z_2 = (a + i.b)(c + i.d) = ac + i.ad + i.bc + i^2.bd$

នាំឱ្យ $Z_1 \times Z_2 = (ac - bd) + i.(ad + bc)$

គេបាន $|Z_1 \times Z_2| = \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2}$

$$= \sqrt{a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2}$$

$$= \sqrt{(a^2c^2 + b^2c^2) + (a^2d^2 + b^2d^2)}$$

$$= \sqrt{c^2(a^2 + b^2) + d^2(a^2 + b^2)} = \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}$$

គេទាញ $|Z_1 \times Z_2| = \sqrt{a^2 + b^2} \times \sqrt{c^2 + d^2}$

ដោយគេមាន $\begin{cases} |Z_1| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ |Z_2| = \sqrt{c^2 + d^2} \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{|Z_1 \times Z_2| = |Z_1| \times |Z_2|}$ ។

លំហាត់ទី១៥

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិចពីរ Z_1 និង Z_2 ។

ក. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $|Z_1+Z_2| \le |Z_1|+|Z_2|$

ខ. ទាញឱ្យបានថា $\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \le \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}$

ចំពោះគ្រប់ a,b,c,d ជាចំនួនពិត ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $|Z_1+Z_2| \le |Z_1|+|Z_2|$

ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច (XOY) យើងជ្រើសរើសវ៉ិចទ័រពីរ $\vec{U}$ និង $\vec{V}$ មានអាហ្វិករៀងគ្នា

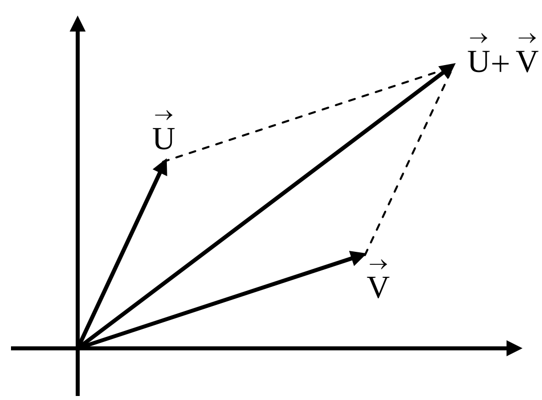
Z_1 និង Z_2 នាំឱ្យវ៉ិចទ័រ $\vec{U}+\vec{V}$ មានអាហ្វិក Z_1+Z_2 ។

តាមលក្ខណៈជ្រុងរបស់ត្រីកោណគេបាន

$|\vec{U}+\vec{V}| \le |\vec{U}|+|\vec{V}|$ ដោយ :

$|\vec{U}|=|Z_1|$, $|\vec{V}|=|Z_2|$

$|\vec{U}+\vec{V}|=|Z_1+Z_2|$



ដូចនេះ $\boxed{|Z_1+Z_2| \le |Z_1|+|Z_2|}$

ខ. ទាញឱ្យបានថា $\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \le \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}$

យើងតាង $Z_1 = a+i.b$ និង $Z_2 = c+i.d$ ដែល a, b, c, d ជាចំនួនពិត ។

មាន $Z_1 + Z_2 = (a+c)+i.(b+d)$

នាំឱ្យ $|Z_1+Z_2| = \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$

ហើយ $|Z_1| = \sqrt{a^2+b^2}$, $|Z_2| = \sqrt{c^2+d^2}$ ។

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $|Z_1+Z_2| \le |Z_1|+|Z_2|$

ដូចនេះ $\boxed{\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \le \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}}$ ។

លំហាត់ទី១៦

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច : $\mathbf{z_1 = \dfrac{\sqrt{6} - i.\sqrt{2}}{2}}$ និង $\mathbf{z_2 = 1 - i}$

ក.ចូរសរសេរ $\mathbf{z_1}$, $\mathbf{z_2}$ និង $\mathbf{Z = \dfrac{z_1}{z_2}}$ ជារាងត្រីកោណមាត្រ ។

ខ.ចូរសរសេរ $\mathbf{Z = \dfrac{z_1}{z_2}}$ ជារាងពិជគណិត ។

គ.ទាញឱ្យបានថា $\mathbf{\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}$ និង $\mathbf{\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.សរសេរ $\mathbf{z_1}$, $\mathbf{z_2}$ និង $\mathbf{Z = \dfrac{z_1}{z_2}}$ ជារាងត្រីកោណមាត្រៈ

គេមាន $\mathbf{z_1 = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - i.\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{6} - i.\sin\dfrac{\pi}{6}\right)}$

ដូចនេះ $\boxed{\mathbf{z_1 = \sqrt{2}\left[\cos(-\frac{\pi}{6}) + i.\sin(-\frac{\pi}{6})\right]}}$ ។

គេមាន $\mathbf{z_2 = 1 - i = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i.\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} - i.\sin\dfrac{\pi}{4}\right)}$

ដូចនេះ $\boxed{\mathbf{z_2 = \sqrt{2}\left[\cos(-\frac{\pi}{4}) + i.\sin(-\frac{\pi}{4})\right]}}$ ។

គេមាន $Z=\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left[\cos(-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{4})+i.\sin(-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{4})\right]$

ដូចនេះ $\boxed{Z=\cos\dfrac{\pi}{12}+i.\sin\dfrac{\pi}{12}}$ ។

ខ. សរសេរ $Z=\dfrac{z_1}{z_2}$ ជារាងពិជគណិត

គេបាន $Z=\dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2(1-i)}=\dfrac{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})(1+i)}{2(1-i)(1+i)}=\dfrac{\sqrt{6}+i\sqrt{6}-i\sqrt{2}+\sqrt{2}}{4}$

ដូចនេះ $\boxed{Z=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i.\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$ ។

គ. ទាញអោយបានថា $\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ និង $\sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន :

$Z=\cos\dfrac{\pi}{12}+i.\sin\dfrac{\pi}{12}$ (1) និង $Z=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i.\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (2)

ដោយផ្ទឹម (1) និង (2) គេទាញបាន :

$\boxed{\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$ និង $\boxed{\sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$ ។

លំហាត់ទី១៧

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=\sqrt{2+\sqrt{2}}+i.\sqrt{2-\sqrt{2}}$ ។

ក-ចូរសរសេរ z^2 ជាទំរង់ពិជគណិត ។

ខ-ចូរសរសេរ z^2 និង z ជាទំរង់ត្រីកោណមាត្រ ។

គ-ទាញរកតំលៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{\pi}{8}$ និង $\sin\frac{\pi}{8}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-សរសេរ z^2 ជាទំរង់ពិជគណិត

យើងបាន $z^2=(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i.\sqrt{2-\sqrt{2}})^2$

$$\begin{aligned}
&=\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2+2i\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)+\left(i.\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2\\
&=2+\sqrt{2}+2i.\sqrt{4-2}-2+\sqrt{2}\\
&=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}.i
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{z^2=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}.i}$

ខ-សរសេរ z^2 និង z ជាទំរង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $z^2=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}.i$

$$=4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i.\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=4\left(\cos\frac{\pi}{4}+i.\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

ដូចនេះ $z^2=4\left(\cos\frac{\pi}{4}+i.\sin\frac{\pi}{4}\right)$ និង $z=2\left(\cos\frac{\pi}{8}+i.\sin\frac{\pi}{8}\right)$

គ-ទាញរកតំលៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{\pi}{8}$ និង $\sin\frac{\pi}{8}$

តាមសំរាយខាងលើគេមាន $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{8} + i.\sin\frac{\pi}{8}\right)$

ដោយ $z = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i.\sqrt{2-\sqrt{2}}$

គេទាញ $2\left(\cos\frac{\pi}{8} + i.\sin\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i.\sqrt{2-\sqrt{2}}$

ដូចនេះ $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ និង $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{8}$ ។

លំហាត់ទី១៨

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=\cos\frac{4\pi}{5}+i.\sin\frac{4\pi}{5}$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $(1+Z)^3=8\cos^3\frac{2\pi}{5}(\cos\frac{6\pi}{5}+i.\sin\frac{6\pi}{5})$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$(1+Z)^3=8\cos^3\frac{2\pi}{5}(\cos\frac{6\pi}{5}+i.\sin\frac{6\pi}{5})$$

យើងមាន $1+Z=1+\cos\frac{4\pi}{5}+i.\sin\frac{4\pi}{5}$

តាមរូបមន្ត $1+\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}$ និង $\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

យើងបាន $1+Z=2\cos^2\frac{2\pi}{5}+2i\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}$

ឬ $1+Z=2\cos\frac{2\pi}{5}(\cos\frac{2\pi}{5}+i.\sin\frac{2\pi}{5})$

តាមរូបមន្តដឺម័រយើងបាន :

$$(1+Z)^3=\left[2\cos\frac{2\pi}{5}(\cos\frac{2\pi}{5}+i.\sin\frac{2\pi}{5})\right]^3$$

$$=8\cos^3\frac{2\pi}{5}(\cos\frac{6\pi}{5}+i.\sin\frac{6\pi}{5})$$

ដូចនេះ $\boxed{(1+Z)^3=8\cos^3\frac{2\pi}{5}(\cos\frac{6\pi}{5}+i.\sin\frac{6\pi}{5})}$ ។

លំហាត់ទី១៩

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z = 4\sqrt{2}(-1+i)$

ក-ចូរសរសេរ Z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ខ-គណនាឬសទី3 នៃ Z ។

ដំណោះស្រាយ

ក-សរសេរ z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ :

យើងបាន $Z = 4\sqrt{2}(-1+i)$

$$= 8\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i.\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 8\left(-\cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 8\left[\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i.\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= 8\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i.\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{Z = 8\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i.\sin\frac{3\pi}{4}\right)}$ ។

ខ-គណនាឬសទី3 នៃ Z

យើងតាង W_k ជាឬសទី3 នៃ $Z = 8\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i.\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

តាមរូបមន្តឬសទី n : $W_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i.\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$

យើងបាន $W_k = \sqrt[3]{8}\left[\cos\left(\dfrac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)+i.\sin\left(\dfrac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)\right]$

$$= 2[\cos(\frac{3\pi+8k\pi}{12})+i.\sin(\frac{3\pi+8k\pi}{12})]$$

-បើ $k=0$: $W_0 = 2(\cos\frac{\pi}{4}+i.\sin\frac{\pi}{4})$

-បើ $k=1$: $W_1 = 2(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12})$

-បើ $k=2$: $W_2 = 2(\cos\frac{19\pi}{12}+i.\sin\frac{19\pi}{12})$ ។

លំហាត់ទី២០

គេអោយ $\mathbf{f(z)=z^3-2\left(\sqrt{3}+i\right).z^2+4\left(1+i\sqrt{3}\right).z-8i}$

ក.ចូរបង្ហាញថា $\forall z\in\mathbb{C}\ \ \mathbf{f(z)=(z-2i)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)}$

ខ.ដោះស្រាយសមីការ $\mathbf{f(z)=0}$ ក្នុងសំណុំកុំផ្លិច ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា $\forall z\in\mathbb{C}\ :\ \mathbf{f(z)=(z-2i)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)}$

យើងមាន $\mathbf{f(z)=(z-2i).\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)}$

ដោយពន្លាតអនុគមន៍នេះយើងបាន :

$$\begin{aligned}\mathbf{f(z)} &= \mathbf{z^3-2\sqrt{3}z+4z-2i(z^2-2\sqrt{3}z+4)}\\ &= \mathbf{z^3-2\sqrt{3}.z^2+4z-2iz^2+4\sqrt{3}iz-8i}\\ &= \mathbf{z^3-2\left(\sqrt{3}+i\right).z^2+4\left(1+i\sqrt{3}\right).z-8i}\end{aligned}$$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{\forall z\in\mathbb{C}\ \ \mathbf{f(z)=(z-2i)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)}}$ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ

បើ $\mathbf{f(z)=0}$ នាំអោយ $\mathbf{(z-2i).\left(z^2-2\sqrt{3}.z+4\right)=0}$

គេទាញឫស $\mathbf{z=2i}$ ហើយ $\mathbf{,z^2-2\sqrt{3}.z+4=0\ \ ,\Delta'=3-4=-1=i^2}$

នាំអោយ $\mathbf{z_1=\sqrt{3}+i\ \ ,z_2=\sqrt{3}-i}$ ។

លំហាត់ទី២១

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=\cos\frac{4\pi}{7}+i.\sin\frac{4\pi}{7}$ ។

ចូរសរសេរ $(1+z)^4$ ជារាងត្រីកោណមាត្រ ។

ដំណោះស្រាយ

សរសេរ $(1+z)^4$ ជារាងត្រីកោណមាត្រ:

គេមាន $z=\cos\frac{4\pi}{7}+i.\sin\frac{4\pi}{7}$

គេបាន $1+z=1+\cos\frac{4\pi}{7}+i.\sin\frac{4\pi}{7}$

$$1+z=2\cos^2\frac{2\pi}{7}+2i.\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}$$

$$=2\cos\frac{2\pi}{7}(\cos\frac{2\pi}{7}+i.\sin\frac{2\pi}{7})$$

តាមរូបមន្តដឺម័រគេអាចសរសេរ :

$$(1+z)^4=\left[2\cos\frac{2\pi}{7}(\cos\frac{2\pi}{7}+i.\sin\frac{2\pi}{7})\right]^4$$

$$=16\cos^4\frac{2\pi}{7}\left(\cos\frac{8\pi}{7}+i.\sin\frac{8\pi}{7}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{(1+z)^4=16\cos^4\frac{2\pi}{7}\left(\cos\frac{8\pi}{7}+i.\sin\frac{8\pi}{7}\right)}$ ។

លំហាត់ទី២២

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 1 + i$ និង $z_2 = \frac{\sqrt{6} + i.\sqrt{2}}{2}$

ក-ចូរសរសេរ z_1 , z_2 និង $\frac{z_1}{z_2}$ ជាទំរង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ខ-ចូរសរសេរ $\frac{z_1}{z_2}$ ជាទំរង់ពិជគណិត ។

គ-ប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរទាញរកតំលៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-សរសេរ z_1 , z_2 និង $\frac{z_1}{z_2}$ ជាទំរង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $z_1 = 1 + i$ ដោយ $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

គេបាន $z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i.\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ។

គេមាន $z_2 = \frac{\sqrt{6} + i.\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}.\sqrt{3} + i.\sqrt{2}}{2}$

$$z_2 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i.\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i.\sin\frac{\pi}{6}\right) \text{ ។}$$

គេបាន $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i.\sin\frac{\pi}{6}\right)} = \cos\frac{\pi}{12} + i.\sin\frac{\pi}{12}$ ។

ខ-សរសេរ $\frac{z_1}{z_2}$ ជាទំរង់ពិជគណិត

គេបាន $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i}{\frac{\sqrt{6}+i.\sqrt{2}}{2}} = \frac{2(1+i)(\sqrt{6}-i.\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+i.\sqrt{2})(\sqrt{6}-i.\sqrt{2})}$

$= \frac{2(\sqrt{6}-i.\sqrt{2}+i.\sqrt{6}+\sqrt{2})}{6+2}$

$= \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})+i.(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$

ដូចនេះ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i.\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ។

គ-ទាញរកតំលៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}$

តាមសំរាយខាងលើគេមាន :

$\frac{z_1}{z_2} = \cos\frac{\pi}{12} + i.\sin\frac{\pi}{12}$ និង $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i.\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

គេទាញ $\cos\frac{\pi}{12} + i.\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i.\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

ដូចនេះ $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ និង $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ។

លំហាត់ទី២៣

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិច (Z_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} Z_0 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} \\ Z_{n+1} = \dfrac{1}{2}(\ Z_n + |\ Z_n\ |\ )\ ;\ n \in IN \end{cases}$

($|\ Z_n\ |$ ជាម៉ូឌុលនៃ Z_n) ។

សន្មតថា $Z_n = \rho_n(\cos\theta_n + i.\sin\theta_n)\ ,\ \forall n \in IN$

ដែល $\rho_n > 0\ ,\ \rho_n\ ;\ \theta_n \in IR$ ។

ក-ចូររកទំនាក់ទំនងរវាង θ_n និង θ_{n+1} ហើយ ρ_n និង ρ_{n+1} ។

ខ-រកប្រភេទនៃស្វ៊ីត (θ_n) រួចគណនា θ_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ-ចូរបង្ហាញថា $\rho_n = \rho_0 \cos\theta_0 \cos\dfrac{\theta_1}{2}\cos\dfrac{\theta_2}{2}....\cos\dfrac{\theta_{n-1}}{2}$

រួចបញ្ជាក់ ρ_n អនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក-រកទំនាក់ទំនងរវាង θ_n និង θ_{n+1} ហើយ ρ_n និង ρ_{n+1}

យើងមាន $Z_n = \rho_n(\cos\theta_n + i.\sin\theta_n)$

នាំឱ្យ $Z_{n+1} = \rho_{n+1}(\cos\theta_{n+1} + i\sin\theta_{n+1})$

ដោយ $Z_{n+1} = \dfrac{1}{2}(\ Z_n + |\ Z_n\ |\ )$ ហើយ $|\ Z_n\ | = \rho_n$

គេបាន $\rho_{n+1}(\cos\theta_{n+1} + i\sin\theta_{n+1}) = \dfrac{1}{2}\left[\rho_n(\cos\theta_n + i.\sin\theta_n) + \rho_n\right]$

$$\rho_{n+1}(\cos\theta_{n+1}+i.\sin\theta_{n+1})=\frac{1}{2}\rho_n(1+\cos\theta_n+i.\sin\theta_n)$$

$$\rho_{n+1}(\cos\theta_{n+1}+i.\sin\theta_{n+1})=\rho_n\cos\frac{\theta_n}{2}(\cos\frac{\theta_n}{2}+i.\sin\frac{\theta_n}{2})$$

គេទាញបាន $\rho_{n+1}=\rho_n\cos\frac{\theta_n}{2}$ និង $\theta_{n+1}=\frac{\theta_n}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{\theta_{n+1}=\frac{\theta_n}{2} \text{ និង } \rho_{n+1}=\rho_n\cos\frac{\theta_n}{2}}$ ។

ខ-ប្រភេទនៃស្វ៊ីត (θ_n) និង គណនា θ_n ជាអនុគមន៍នៃ n

តាមសម្រាយខាងលើយើងមាន $\theta_{n+1}=\frac{1}{2}\theta_n$ នាំឱ្យ (θ_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង

ស្មើ $q=\frac{1}{2}$ ។

តាមរូបមន្ត $\theta_n=\theta_0\times q^n$

ដោយ $Z_0=\rho_0(\cos\theta_0+i\sin\theta_0)=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{3}+i.\sin\frac{\pi}{3}$

គេទាញបាន $\rho_0=1\,;\,\theta_0=\frac{\pi}{3}$

ដូចនេះ $\boxed{\theta_n=\frac{\pi}{3}.\frac{1}{2^n}}$ ។

គ-បង្ហាញថា $\rho_n = \rho_0 \cos\theta_0 \cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}....\cos\frac{\theta_n}{2}$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $\rho_{n+1} = \rho_n \cos\frac{\theta_n}{2}$

ឬ $\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n} = \cos\frac{\theta_n}{2}$

គេបាន $\prod_{k=0}^{k=n-1}\left(\frac{\rho_{k+1}}{\rho_k}\right) = \prod_{k=0}^{k=n-1}\left[\cos(\frac{\theta_k}{2})\right]$

$$\frac{\rho_n}{\rho_0} = \cos\theta_0 . \cos\frac{\theta_1}{2} . \cos\frac{\theta_2}{2} ....\cos\frac{\theta_{n-1}}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\rho_n = \rho_0 \cos\theta_0 \cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}....\cos\frac{\theta_{n-1}}{2}}$ ។

ម្យ៉ាងទៀតយើងមាន $\sin\theta_n = 2\sin\frac{\theta_n}{2}\cos\frac{\theta_n}{2} = 2\sin\theta_{n+1}\cos\frac{\theta_n}{2}$

គេទាញ $\cos\frac{\theta_n}{2} = \frac{1}{2}.\frac{\sin\theta_n}{\sin\theta_{n+1}}$

ហេតុនេះ $\rho_n = \frac{1}{2^n}.\frac{\sin\theta_0}{\sin\theta_1}.\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}.....\frac{\sin\theta_{n-1}}{\sin\theta_n} = \frac{1}{2^n}.\frac{\sin\theta_0}{\sin\theta_n}$

ដូចនេះ $\boxed{\rho_n = \frac{1}{2^n}\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\sin(\frac{\pi}{3}.\frac{1}{2^n})} = \frac{\sqrt{3}}{2^{n+1}}.\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{3}.\frac{1}{2^n})}}$ ។

លំហាត់ទី២៤

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{z = x + i.y}$ ដែល $\mathbf{x}$ និង $\mathbf{y}$ ជាពីរចំនួនពិត ។

ចូរកំនត់តម្លៃ $\mathbf{x}$ និង $\mathbf{y}$ បើគេដឹងថា :

$\mathbf{(3+2i)\,z + (1+3i)\,\overline{z} = \dfrac{10}{2-i}}$ ($\mathbf{\overline{z}}$ ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ $\mathbf{z}$) ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\mathbf{(3+2i)\,z + (1+3i)\,\overline{z} = \dfrac{10}{2-i}}$

ដោយ $\mathbf{z = x + i.y}$ នាំឱ្យ $\mathbf{\overline{z} = x - i.y}$

គេបាន $\mathbf{(3+2i)(x+iy) + (1+3i)(x-iy) = \dfrac{10}{2-i}}$

$$\mathbf{3x + 3iy + 2ix - 2y + x - iy + 3ix + 3y = \frac{10(2+i)}{5}}$$

$$\mathbf{(4x+y) + i\,.(5x+2y) = 4 + 2i}$$

គេទាញបាន $\mathbf{\begin{cases} 4x + y = 4 \\ 5x + 2y = 2 \end{cases}}$

គេមាន $\mathbf{D = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 5 = 3}$, $\mathbf{D_x = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 2 = 6}$

និង $\mathbf{D_y = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 20 = -12}$

គេបាន $\mathbf{x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{6}{3} = 2}$, $\mathbf{y = \dfrac{D_y}{D} = -\dfrac{12}{3} = -4}$

ដូចនេះ $\boxed{\mathbf{x = 2\,,\, y = -4}}$ ។

លំហាត់ទី២៥

គេឱ្យ z_1 ; z_2 ជាចំនួនកុំផ្លិចដែល $|z_1|=|z_2|=r>0$ ។

បង្ហាញថា $\left(\frac{z_1+z_2}{r^2+z_1z_2}\right)^2+\left(\frac{z_1-z_2}{r^2-z_1z_2}\right)^2\geq\frac{1}{r^2}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា :

$$\left(\frac{z_1+z_2}{r^2+z_1z_2}\right)^2+\left(\frac{z_1-z_2}{r^2-z_1z_2}\right)^2\geq\frac{1}{r^2}$$

តាង $z_1=r(\cos 2x+i\sin 2x)$ **និង** $z_2=r(co2y+i\sin 2y)$

ដែល $x\in IR$; $y\in IR$ ។

គេបាន :

$$\frac{z_1+z_2}{r^2+z_1z_2}=\frac{r[\ (\cos 2x+\cos 2y)+i(\sin 2x+\sin 2y)\ ]}{r^2+r^2[\ \cos(2x+2y)+i.\sin(2x+2y)\ ]}$$

$$=\frac{2\cos(x+y)\cos(x-y)+2i\sin(x+y)\cos(x-y)}{r\ [\ 2\cos^2(x+y)+2i\sin(x+y)\cos(x+y)\ ]}$$

$$=\frac{1}{r}.\frac{\cos(x-y)}{\cos(x+y)}$$

ដូចគ្នាដែរ $\frac{z_1-z_2}{r^2-z_1z_2}=\frac{1}{r}\frac{\sin(y-x)}{\sin(y+x)}$

គេបាន :

$$\left(\frac{z_1+z_2}{r^2+z_1z_2}\right)^2+\left(\frac{z_1-z_2}{r^2-z_1z_2}\right)^2=\frac{1}{r^2}\left[\frac{\cos^2(x-y)}{\cos^2(x+y)}+\frac{\sin^2(y-x)}{\sin^2(y+x)}\right]$$

ដោយ $\frac{\cos^2(x-y)}{\cos^2(x+y)}\ge\cos^2(x-y)$ ព្រោះ $\cos^2(x+y)\le 1$

ហើយ $\frac{\sin^2(y-x)}{\sin^2(y+x)}\ge\sin^2(x-y)$ ព្រោះ $\sin^2(x+y)\le 1$

$$\frac{\cos^2(x-y)}{\cos^2(x+y)}+\frac{\sin^2(y-x)}{\sin^2(y+x)}\ge\cos^2(x-y)+\sin^2(x-y)=1$$

ដូចនេះ $\left(\frac{z_1+z_2}{r^2+z_1z_2}\right)^2+\left(\frac{z_1-z_2}{r^2-z_1z_2}\right)^2\ge\frac{1}{r^2}$ ។

លំហាត់ទី២៦

គេយក $z_1\ ;\ z_2\ ; ....; z_n$ ជាចំនួនកុំផ្លិចដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង

$$(k+1)z_{k+1} - i(n-k)z_k = 0\ ;\ k = 0\ , 1\ , 2\ , ...\ , n-1$$

ក-កំនត់ z_0 បើគេដឹងថា $z_0 + z_1 + z_2 + ... + z_n = 2^n$

ខ-ចំពោះតម្លៃ z_0 ដែលបានកំនត់ខាងលើចូរបង្ហាញថា :

$$|z_0|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2 + ... + |z_n|^2 < \frac{(3n+1)^n}{n!}$$

ដំណោះស្រាយ

ក-កំនត់ z_0 បើគេដឹងថា $z_0 + z_1 + z_2 + ... + z_n = 2^n$

គេមាន $(k+1)z_{k+1} - i(n-k)z_k = 0$

គេបាន $\dfrac{z_{k+1}}{z_k} = i.\dfrac{n-k}{k+1}$

$$\prod_{k=0}^{(p-1)}\left(\frac{z_{k+1}}{z_k}\right) = \prod_{k=0}^{p-1}\left(i.\frac{n-k}{k+1}\right)$$

$$\frac{z_p}{z_0} = i^p C_n^p\ \ ;\ C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

គេទាញ $z_p = i^p z_0\, C_n^p\ \ ; p = 0\ , 1\ , 2\ , ...$

ដោយ $z_0 + z_1 + z_2 + ... + z_n = 2^n$ ឬ $\sum_{p=0}^{n}(z_p) = 2^n$

មាន $\sum_{p=0}^{n}(z_p) = z_0\sum_{p=0}^{n}C_n^p i^p = z_0(1+i)^n$

គេបាន $z_0(1+i)^n = 2^n$

គេទាញ $z_0 = \dfrac{2^n}{(1+i)^n} = (1-i)^n$

ដូចនេះ $z_0 = (1-i)^n$ ។

ខ-ចំពោះតម្លៃ z_0 ដែលបានកំនត់ខាងលើចូរបង្ហាញថា :

$$|z_0|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2 + ... + |z_n|^2 < \frac{(3n+1)^n}{n!}$$

ដោយអនុវត្តន៏វិសមភាព AM – GM យើងបាន

$$|z_0|^2 + |z_1|^2 + ... + |z_n|^2 = |z_0|^2\left((C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + ... + (C_n^n)^2\right)$$

$$= |z_0|^2 C_{2n}^n = 2^n.\frac{(2n)!}{n!n!}$$

$$= \frac{2^n}{n!}\left(2n(2n-1)(2n-2)....(n+1)\right)$$

$$< \frac{2^n}{n!}\left(\frac{2n + (2n-1) + (2n-2) + ... + (n+1)}{n}\right)^n$$

$$< \frac{(3n+1)^n}{n!}$$

ដូចនេះ $|z_0|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2 + ... + |z_n|^2 < \dfrac{(3n+1)^n}{n!}$ ។

លំហាត់ទី២៧

គេឱ្យ z_1 ; z_2 ; z_3 ជាចំនួនកុំផ្លិចដោយដឹងថា :

$$z_1 + z_2 + z_3 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = 0$$ ។

ចូរបង្ហាញថា $|z_1| = |z_2| = |z_3|$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $|z_1| = |z_2| = |z_3|$

គេមាន $z_1 + z_2 + z_3 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = 0$

គេទាញ $\begin{cases} z_1 + z_2 = -z_3 & (1) \\ z_1 z_2 + z_3(z_1 + z_2) = 0 & (2) \end{cases}$

យក (1) ជំនួសក្នុង (2) យើងបាន :

$z_1 z_2 - {z_3}^2 = 0$ **នាំឱ្យ** $|z_3|^2 = |z_1| . |z_2|$

ដូចគ្នាដែរ $|z_2|^2 = |z_1| . |z_3|$ **និង** $|z_1|^2 = |z_2| . |z_3|$

យើងបាន :

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = |z_1||z_2| + |z_2||z_3| + |z_3||z_1|$$

ឬ $(|z_1| - |z_2|)^2 + (|z_2| - |z_3|)^2 + (|z_3| - |z_1|)^2 = 0$

ដូចនេះ $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ ។

លំហាត់ទី២៨

ចូរបង្ហាញថា $\left|\dfrac{6z-i}{2+3iz}\right| \le 1$ លុះត្រាតែ $|z| \le \dfrac{1}{3}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $|z| \le \dfrac{1}{3}$

គេមាន $\left|\dfrac{6z-i}{2+3iz}\right| \le 1$

លក្ខខណ្ឌ $2+3iz \ne 0$ ឬ $z \ne \dfrac{2i}{3}$

គេបាន $|6z-i| \le |2+3iz|$

$$|6z-i|^2 \le |2+3iz|^2$$

$$(6z-i)(6\overline{z}+i) \le (2+3iz)(2-3i\overline{z})$$

$$36z\overline{z}+6iz-6i\overline{z}+1 \le 4-6i\overline{z}+6iz+9z\overline{z}$$

$$27z\overline{z} \le 3$$

$$z\overline{z} \le \frac{1}{9}$$

$$|z|^2 \le \frac{1}{9}$$

ដូចនេះ $|z| \le \dfrac{1}{3}$ ។

លំហាត់ទី២៩

គេឱ្យ $z_1 \ ; \ z_2 \ ; \ z_3 \ ; ....; z_n$ ជាចំនួនកុំផ្លិចដែលមានម៉ូឌុលស្មើ 1 ។

គេតាង $Z = \left(\sum_{k=1}^{n} (z_k) \right) \times \left(\sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{z_k}) \right)$ ។

ចូរបង្ហាញថា $0 \le Z \le n^2$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $0 \le Z \le n^2$

ដោយ $z_1 \ ; \ z_2 \ ; \ z_3 \ ; ....; z_n$ ជាចំនួនកុំផ្លិចដែលមានម៉ូឌុលស្មើ 1

នោះគេអាចតាង $z_k = \cos x_k + i.\sin x_k$

ដែល $x_k \in IR \ ; k = 1 , 2 , \ 3 ,....,n$

គេបាន
$$Z = \left(\sum_{k=1}^{n} (z_k) \right) \times \left(\sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{z_k}) \right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\cos x_k + i.\sin x_k \right) \times \sum_{k=1}^{n} \left(\cos x_k - i \sin x_k \right)$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{n} \cos x_k \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} \sin x_k \right)^2 \ge 0$$

គេបាន $Z \ge 0$

ម្យ៉ាងទៀតតាមវិសមភាព Cauchy – Schwartz

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \cos x_k \right)^2 \le n \ \sum_{k=1}^{n} \left(\cos^2 x_k \right)$$

និង $\left(\sum_{k=1}^{n}\sin x_k\right)^2 \le n\sum_{k=1}^{n}\left(\sin^2 x_k\right)$

គេទាញ $Z \le n\sum_{k=1}^{n}\left(\cos^2 x_k\right) + n\sum_{k=1}^{n}(\sin^2 x_k)$

$$Z \le n\sum_{k=1}^{n}\left(\cos^2 x_k + \sin^2 x_k\right)$$

$$Z \le n.n = n^2$$

ដូចនេះ $0 \le Z \le n^2$ ។

សំគាល់ : គេអាចស្រាយ $Z \le n^2$ តាមមួយរបៀបទៀតដូចខាងក្រោម

ដោយ $|z_k| = 1$ នោះ $\bar{z}_k = \frac{1}{z_k}$ គ្រប់ $k = 1\ ;2\ ;.....;n$

គេបាន $Z = \left(\sum_{k=1}^{n}(z_k)\right) \times \left(\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{z_k})\right)$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) \times \left(\sum_{k=1}^{n} \bar{z}_k\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) \times \overline{\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)}$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{n}(z_k)\right|^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n}|z_k|\right)^2 = n^2$$

គេទាញបាន $Z \le n^2$ ។

លំហាត់ទី៣០

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច z ដែល $|z|=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$\sqrt{2} \le |1-z| + |1+z^2| \le 4$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\sqrt{2} \le |1-z| + |1+z^2| \le 4$

តាង $z = \cos t + i.\sin t$

គេបាន $|1-z| = \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t} = 2|\sin\frac{t}{2}|$

ហើយ $|1+z^2| = \sqrt{(1+\cos 2t)^2 + \sin^2 2t} = 2|\cos t|$

$$= 2|1-2\sin^2\frac{t}{2}|$$

គេបាន $|1-z| + |1-z^2| = 2\left(|\sin\frac{t}{2}| + |1-2\sin^2\frac{t}{2}|\right)$

ដោយយក $x = \sin\frac{t}{2}$; $-1 \le x \le 1$ ហើយតាងអនុគមន៍ f

កំនត់ដោយ $f(x) = |x| + |1-2x^2|$ ដែល $-1 \le x \le 1$

ចំពោះ $-1 \le x \le 1$ គេបាន $\frac{\sqrt{2}}{2} \le f(x) \le 2$

ដូចនេះ $\sqrt{2} \le |1-z| + |1+z^2| \le 4$ ។

លំហាត់ទី៣១

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x})+i.(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x})$

ដែល x ជាចំនួនពិត។

ចូរកំនត់រកម៉ូឌុលអប្បបរមានៃចំនួនកុំផ្លិចនេះ ?

ដំណោះស្រាយ

រកម៉ូឌុលអប្បបរមានៃចំនួនកុំផ្លិច

យើងបាន $|Z|=\sqrt{(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x})^2+(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x})^2}$

តាង $f(x)=(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x})^2+(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x})^2$

$$=\cos^4 x+2+\frac{1}{\cos^4 x}+\sin^4 x+2+\frac{1}{\sin^4 x}$$

$$=4+(\cos^4 x+\sin^4 x)+(\frac{1}{\sin^4 x}+\frac{1}{\cos^4 x})$$

$$=4+(\cos^4 x+\sin^4 x)+(\frac{\cos^4 x+\sin^4 x}{\sin^4 x\cos^4 x})$$

$$f(x)=4+(\cos^4 x+\sin^4 x)(1+\frac{1}{\sin^4 x\cos^4 x})$$

$$=4+\left[(\cos^2 x+\sin^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x\right](1+\frac{16}{\sin^4 2x})$$

$$=4+(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x)(1+\frac{16}{\sin^4 2x})$$

ដោយគេមាន $\sin^2 2x \le 1$ នាំឲ្យ $1-\frac{1}{2}\sin^2 2x \ge \frac{1}{2}$

និង $1+\frac{16}{\sin^4 2x} \ge 17$

គេទាញ $4+(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x)(1+\frac{16}{\sin^4 2x}) \ge 4+\frac{17}{2}=\frac{25}{2}$

យើងបាន $f(x)=4+(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x)(1+\frac{16}{\sin^4 2x}) \ge \frac{25}{2}$

ដោយ $|Z|=\sqrt{f(x)}$ គេទាញបាន $|Z| \ge \frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

ដូចនេះម៉ូឌុលអប្បបរមានៃ Z គឺ $|Z|_{min}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ។

លំហាត់ទី៣២

គេឱ្យ $A = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + i\right)^n - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - i\right)^n \ , \ n \in IN$ ។

ចូរបង្ហាញថា $A = i.\frac{2^{n+1}}{(\sqrt{3})^n}.\sin\frac{n\pi}{3}$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $A = i.\frac{2^{n+1}}{(\sqrt{3})^n}.\sin\frac{n\pi}{3}$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ ។

យើងមាន $A = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + i\right)^n - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - i\right)^n \ , \ n \in IN$

តាង $Z = \frac{1}{\sqrt{3}} + i = \frac{1 + i.\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi}{3}\right)$

តាមរូបមន្តដឺម័រគេបាន $Z^n = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + i\right)^n = \frac{2^n}{(\sqrt{3})^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3} + i.\sin\frac{n\pi}{3}\right)$

ហើយ $\overline{Z}^n = \frac{2^n}{(\sqrt{3})^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3} - i.\sin\frac{n\pi}{3}\right)$

គេទាញ $A = \frac{2^n}{(\sqrt{3})^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3} + i.\sin\frac{n\pi}{3}\right) - \frac{2^n}{(\sqrt{3})^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3} - i.\sin\frac{n\pi}{3}\right)$

$$= \frac{2^n}{(\sqrt{3})^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3} + i.\sin\frac{n\pi}{3} - \cos\frac{n\pi}{3} + i.\sin\frac{n\pi}{3}\right) = i.\frac{2^{n+1}}{(\sqrt{3})^n}.\sin\frac{n\pi}{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{A = i.\frac{2^{n+1}}{(\sqrt{3})^n}.\sin\frac{n\pi}{3}}$ ។

លំហាត់ទី៣៣

ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច $(O, \vec{i}, \vec{j})$ គេឱ្យបួនចំនុច A , B , C ,D

ដែលមានអាហ្វិករៀងគ្នា

$Z_A = 1+6i$, $Z_B = 4+5i$, $Z_C = 5+4i$ និង $Z_D = -2-3i$ ។

ចូរស្រាយថាចតុកោណ ABCD ចារិកក្នុងរង្វង់មួយដែលគេនឹងបញ្ជាក់ផ្ចិត

និង កាំរបស់វា ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថាចតុកោណ ABCD ចារិកក្នុងរង្វង់

យើងតាង $(c): x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

ជាសមីការរង្វង់ចារិកក្រៅត្រីកោណ ABC ។

យើងបាន $A \in (c)$ នាំឱ្យ $1^2 + 6^2 + a + 6b + c = 0$

ឬ $a + 6b + c = -37$ (1)

$B \in (c)$ នាំឱ្យ $4^2 + 5^2 + 4a + 5b + c = 0$

ឬ $4a + 5b + c = -41$ (2)

$C \in (c)$ នាំឱ្យ $(-2)^2 + (-3)^2 - 2a - 3b + c = 0$

ឬ $-2a - 3b + c = -13$ (3)

យើងបានប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} a+6b+c=-37 \\ 4a+5b+c=-41 \\ -2a-3b+c=-13 \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយប្រព័ន្ធនេះគេបានចម្លើយ

$a=-2$, $b=-2$, $c=-23$ ។

សមីការរង្វង់ចារិកក្រៅត្រីកោណ ABC អាចសរសេរ :

$(c): x^2+y^2-2x-2y-23=0$

ឬ $(c): (x-1)^2+(y-1)^2=25$

ម្យ៉ាងទៀតដោយយកកូអរដោនេ D ជួសក្នុងសមីការ

$(c): (-2-1)^2+(-3-1)^2=25$

វាផ្ទៀងផ្ទាត់នោះនាំឱ្យ $D\in(c)$ ។

ដោយបួនចំនុច A , B , C, D ស្ថិតនៅលើរង្វង់មានសមីការ

$(c): (x-1)^2+(y-1)^2=25$ តែមួយ

នោះនាំឱ្យចតុកោណABCDចារិកក្នុងរង្វង់ (c) មានផ្ចិត $I(1,1)$

និង កាំ $R=5$ ។

លំហាត់ទី៣៤

គេឱ្យ z_1 និង z_2 ជាពីរចំនួនកុំផ្លិច ។

ចូរបង្ហាញថា $|1+z_1z_2|+|z_1+z_2|\geq\sqrt{|z_1{}^2-1||z_2{}^2-1|}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $|1+z_1z_2|+|z_1+z_2|\geq\sqrt{|z_1{}^2-1||z_2{}^2-1|}$

តាមវិសមភាពត្រីកោណគេបាន :

$$|1+z_1z_2|+|z_1+z_2|\ \geq\ |1+z_1z_2+z_1+z_2|$$

និង $|1+z_1z_2|+|z_1+z_2|\ \geq\ |1+z_1z_2-z_1-z_2|$

គេបាន $\left(|1+z_1z_2|+|z_1+z_2|\right)^2\geq|(1+z_1z_2)^2-(z_1+z_2)^2|$

ដោយ $(1+z_1z_2)^2-(z_1+z_2)^2=1-z_1{}^2-z_2{}^2+z_1{}^2z_2{}^2=(1-z_1{}^2)(1-z_2{}^2)$

គេបាន $\left(|1+z_1z_2|+|z_1+z_2|\right)^2\geq|(1-z_1{}^2)(1-z_2{}^2)|$

$$\left(|1+z_1z_2|+|z_1+z_2|\right)^2\geq|1-z_1{}^2||1-z_2{}^2|$$

ដូចនេះ $\left(|1+z_1z_2|+|z_1+z_2|\right)^2\geq|(1+z_1z_2)^2-(z_1+z_2)^2|$

លំហាត់ទី៣៥

គេឲ្យ z_1 និង z_2 ជាចំនួនកុំផ្លិចពីរ ។

ចូរស្រាយថា $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$

គេមាន $|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)$

$$|z_1+z_2|^2=z_1\bar{z}_1+z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2+z_2\bar{z}_2$$

$$|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2+|z_2|^2 \quad (1)$$

ហើយ $|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)$

$$|z_1-z_2|^2=z_1\bar{z}_1-z_1\bar{z}_2-\bar{z}_1z_2+z_2\bar{z}_2$$

$$|z_1-z_2|^2=|z_1|^2-z_1\bar{z}_2-\bar{z}_1z_2+|z_2|^2 \quad (2)$$

បូកទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេបាន ៖

$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$ ។

លំហាត់ទី៣៦

គេឲ្យ z_1 និង z_2 ជាចំនួនកុំផ្លិចពីរដែល $|z_1|=|z_2|=1$

និង $z_1.z_2 \neq -1$ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ ជាចំនួនពិតមួយ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ ជាចំនួនពិតមួយ

តាង $Z=\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ នោះ $\overline{Z}=\frac{\overline{z}_1+\overline{z}_2}{1+\overline{z}_1.\overline{z}_2}$

ដោយ $z_1.\overline{z}_1=|z_1|^2=1$ នោះ $\overline{z}_1=\frac{1}{z_1}$ ហើយដូចគ្នា $\overline{z}_2=\frac{1}{z_2}$

គេបាន $\overline{Z}=\frac{\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}}{1+\frac{1}{z_1}.\frac{1}{z_2}}=\frac{z_2+z_1}{z_2z_1+1}=Z$

ដោយ $\overline{Z}=Z$ នោះ $Z=\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ ជាចំនួនពិត ។

លំហាត់ទី៣៧

គេឲ្យពហុធា $P(x)=(x\sin a+\cos a)^{n}$ ដែល $n\in IN^{*}$

ចូររកសំណល់នៃវិធីចែករវាង $P(x)$ នឹង $x^{2}+1$ ។

ដំណោះស្រាយ

សំណល់នៃវិធីចែក

តាង $R(x)$ ជាសំណល់នៃវិធីចែករវាង $P(x)$ នឹង $x^{2}+1$

-បើ $n=1$ នោះ $P(x)=x\sin a+\cos a$

ដូចនេះ $R(x)=x\sin a+\cos a$ ជាសំនល់នៃវិធីចែក ។

-បើ $n\geq 2$ គេបាន $P(x)=(x^{2}+1)Q(x)+R(x)$

ដែល $Q(x)$ ជាផលចែក នឹង $R(x)=Ax+B$

គេបាន $(x\sin a+\cos a)^{n}=(x^{2}+1)Q(x)+Ax+B$

បើ $x=i$ នោះ $(i\sin a+\cos a)^{n}=Ai+B$

ឬ $\cos(na)+i.\sin(na)=B+i.A$

គេទាញ $A=\sin(na)$ និង $B=\cos(na)$

ដូចនេះ $R(x)=x\sin(na)+\cos(na)$ ។

លំហាត់ទី៣៨

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{z = \sqrt{2+\cos\varphi} + i\sqrt{2+\sin\varphi}}$ ដែល $\varphi \in \mathbf{IR}$

ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច $(\mathbf{o}, \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}})$ គេហៅ $\mathbf{M}$ ជាចំនុចរូបភាពនៃ $\mathbf{z}$ ។

ចូរកំណត់តម្លៃតូចបំផុត និង ធំបំផុតនៃ $\mathbf{r = OM}$?

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តម្លៃតូចបំផុត និង ធំបំផុតនៃ $\mathbf{r = OM}$

គេមាន :

$$\mathbf{OM^2 = a^2 + b^2 = (\sqrt{2+\cos\varphi})^2 + (\sqrt{2+\sin\varphi})^2}$$

$\mathbf{OM^2 = 4 + \cos\varphi + \sin\varphi}$ ឬ $\mathbf{OM = \sqrt{4+\cos\varphi+\sin\varphi}}$

គេបាន $\mathbf{r = \sqrt{4+\cos\varphi+\sin\varphi}}$

តាមវិសមភាព **Cauchy – Schwarz** គេមាន :

$$\mathbf{|\cos\varphi + \sin\varphi| \le \sqrt{1^2+1^2}\sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = \sqrt{2}}$$

ឬ $\mathbf{-\sqrt{2} \le \cos\varphi + \sin\varphi \le \sqrt{2}}$

គេទាញ $\mathbf{\sqrt{4-\sqrt{2}} \le r \le \sqrt{4+\sqrt{2}}}$ គ្រប់ $\varphi \in \mathbf{IR}$

ដូចនេះ $\mathbf{r_{min} = \sqrt{4-\sqrt{2}}}$ និង $\mathbf{r_{max} = \sqrt{4+\sqrt{2}}}$ ។

លំហាត់ទី៣៩

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច z_1, z_2, z_3 ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង :

$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ និង $\dfrac{z_1^2}{z_2 z_3} + \dfrac{z_2^2}{z_1 z_3} + \dfrac{z_3^2}{z_1 z_2} + 1 = 0$

ចូរស្រាយថា $|z_1 + z_2 + z_3| \in \{1, 2\}$ ។

ដំណោះស្រាយ ស្រាយថា $|z_1 + z_2 + z_3| \in \{1, 2\}$

គេមាន $\dfrac{z_1^2}{z_2 z_3} + \dfrac{z_2^2}{z_1 z_3} + \dfrac{z_3^2}{z_1 z_2} + 1 = 0$

គេបាន $z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 + z_1 z_2 z_3 = 0$

ឬ $z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 - 3z_1 z_2 z_3 = -4z_1 z_2 z_3$

តាង $z = z_1 + z_2 + z_3$ គេបាន :

$$z^3 - 3z(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3) = -4z_1 z_2 z_3$$

$$z^3 = z_1 z_2 z_3 \left[3z\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right) - 4 \right]$$

$$z^3 = z_1 z_2 z_3 \left[3z(\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}) - 4 \right]$$

$$z^3 = z_1 z_2 z_3 (3z.\overline{z} - 4) = z_1 z_2 z_3 \left(3|z|^2 - 4 \right)$$

គេបាន $|z|^3 = |z_1 z_2 z_3 (3|z|^2 - 4)|$

ឬ $|z|^3 = |3|z|^2 - 4|$

-បើ $3|z|^2 - 4 \geq 0$ ឬ $|z| \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$

គេបាន $|z|^3 = 3|z|^2 - 4$

$$|z|^3 - 3|z|^2 + 4 = 0$$

$$(|z|+1)(|z|-2)^2 = 0 \Rightarrow |z| = 2$$

-បើ $3|z|^2 - 4 < 0$ ឬ $|z| < \frac{2}{\sqrt{3}}$

គេបាន $|z|^3 = -(3|z|^2 - 4)$

$$|z|^3 + 3|z|^2 - 4 = 0$$

$$(|z|-1)(|z|+2)^2 = 0 \Rightarrow |z| = 1$$

ដូចនេះ $|z_1 + z_2 + z_3| \in \{1, 2\}$ ។

លំហាត់ទី៤០

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច z_1 និង z_2 ដែល $|z_1|=|z_2|=1$

ចូរស្រាយថា $|z_1+1|+|z_2+1|+|z_1z_2+1|\geq 2$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $|z_1+1|+|z_2+1|+|z_1z_2+1|\geq 2$

តាមវិសមភាពត្រីកោណ $|a|+|b|\geq|a\pm b|$ គេបាន :

$|z_2+1|+|z_1z_2+1|\geq|z_2+1-z_1z_2-1|$

$|z_2+1|+|z_1z_2+1|\geq|z_2||1-z_1|=|1-z_1|$

ហើយ $|z_1+1|+|1-z_1|\geq|(z_1+1+1-z_1)|=2$

ដូចនេះ $|z_1+1|+|z_2+1|+|z_1z_2+1|\geq 2$ ។

លំហាត់ទី៤១

គេឱ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (a_n) កំណត់ដោយ :

$$\begin{cases} a_1 = 1 , a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} - a_n \ , n = 1 , 2 , 3 , ... \end{cases}$$

គេតាងស្វ៊ីតចំនួនកុំផ្លិច $z_n = a_{n+1} - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} a_n$ ។

ក. ចូរស្រាយថា $z_{n+1} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} z_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \ge 1$ ។

ខ. ចូរដាក់ $\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្ររួចទាញរក z_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ. ទាញរកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត a_n ។ តើ (a_n) ជាស្វ៊ីតខួបឬទេ ?

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយថា $z_{n+1} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} z_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \ge 1$

គេមាន $z_n = a_{n+1} - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} a_n$

គេបាន $z_{n+1} = a_{n+2} - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} a_{n+1}$

ដោយ $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$

គេបាន $z_{n+1}=a_{n+1}-a_n-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}a_{n+1}$

$$=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}a_{n+1}-a_n$$

$$=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}(a_{n+1}-\frac{2}{1+i\sqrt{3}}a_n)$$

$$=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}(a_{n+1}-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}a_n)$$

ដូចនេះ $z_{n+1}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n$ ។

ខ. ដាក់ $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ :

គេបាន $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$

ទាញរក z_n ជាអនុគមន៍នៃ n :

ដោយ $z_{n+1}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n$ នោះ (z_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួន

កុំផ្លិចដែលមានរេសុង $q=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$

និងតួ $z_1=a_2-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}a_1=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$

តាមរូបមន្ត $z_n = z_1 \times q^{n-1} = (\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})^n$

តាមរូបមន្តដឺម័រគេបាន $z_n = \cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}$ ។

គ. ទាញរកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត a_n

គេមាន $z_n = a_{n+1} - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}a_n$

គេបាន $z_n = (a_{n+1} - \frac{a_n}{2}) + i\frac{\sqrt{3}}{2}a_n \quad (1)$

ដោយ $z_n = \cos\frac{n\pi}{3} + i.\sin\frac{n\pi}{3} \quad (2)$

តាមទំនាក់ទំនង $(1) \& (2)$ គេបាន $\frac{\sqrt{3}}{2}a_n = \sin\frac{n\pi}{3}$

ដូចនេះ $a_n = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{n\pi}{3}$ ។

ហើយ (a_n) ជាស្វ៊ីតខួបដែលមានខួប $p = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$ ។

លំហាត់ទី៤២

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិច (z_n) កំណត់ដោយ :

$$z_1 = \frac{2+\sqrt{3}+i}{2} \text{ និង } z_{n+1} = \frac{\sqrt{3}+i}{2} z_n + \frac{2-\sqrt{3}-i}{2}$$

ដែល $n = 1, 2, 3, \ldots$ ។

ក. តាង $w_n = z_n - 1$ ។ បង្ហាញថា (w_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច រួចគណនា w_n ជាអនុគមន៍នៃ n ដោយសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ខ. ទាញបង្ហាញថា $z_n = 2\cos\frac{n\pi}{12}(\cos\frac{n\pi}{12} + i\sin\frac{n\pi}{12})$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា (w_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច :

គេមាន $w_n = z_n - 1$

គេបាន $w_{n+1} = z_{n+1} - 1$

$$= \frac{\sqrt{3}+i}{2} z_n + \frac{2-\sqrt{3}-i}{2} - 1$$

$$= \frac{\sqrt{3}+i}{2}(z_n - 1) = \frac{\sqrt{3}+i}{2} w_n$$

ដូចនេះ (w_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច ។

គណនា w_n ជាអនុគមន៍នៃ n :

គេបាន $w_n = w_1 \times q^{n-1}$

ដោយ $w_1 = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2} = \cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}$

និង $q = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2} = \cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}$

គេបាន $w_n = (\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6})^n$

ដូចនេះ $w_n = \cos\dfrac{n\pi}{6} + i\sin\dfrac{n\pi}{6}$ (រូបមន្តដឺម័រ)

ខ. ទាញបង្ហាញថា $z_n = 2\cos\dfrac{n\pi}{12}(\cos\dfrac{n\pi}{12} + i\sin\dfrac{n\pi}{12})$

គេមាន $w_n = z_n - 1$ នោះ $z_n = 1 + w_n$

$$z_n = 1 + \cos\frac{n\pi}{6} + i\sin\frac{n\pi}{6}$$

$$= 2\cos^2\frac{n\pi}{12} + 2i.\sin\frac{n\pi}{12}\cos\frac{n\pi}{12}$$

$$= 2\cos\frac{n\pi}{12}(\cos\frac{n\pi}{12} + i\sin\frac{n\pi}{12})$$

ដូចនេះ $z_n = 2\cos\dfrac{n\pi}{12}(\cos\dfrac{n\pi}{12} + i\sin\dfrac{n\pi}{12})$ ។

លំហាត់ទី៤៣

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) និង (v_n) កំណត់ដោយ :

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ v_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ និង } \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n - v_n}{\sqrt{2}} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{\sqrt{2}} \end{cases} \text{ ដែល } n \geq 1$$

ក. គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិច $z_n = u_n + i.v_n$ ។

ចូរស្រាយថា (z_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច រួចគណនា z_n

ជាអនុគមន៍នៃ n ដោយសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ខ. សំដែង u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយថា (z_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច :

គេមាន $z_n = u_n + i.v_n$

គេបាន $z_{n+1} = u_{n+1} + i.v_{n+1}$

$$= \frac{u_n - v_n}{\sqrt{2}} + i.\frac{u_n + v_n}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}(u_n + iv_n) = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{1} z_n$$

ដូចនេះ(z_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច ។

គណនា z_n ជាអនុគមន៍នៃ n :

គេបាន $z_n = z_1 \times q^{n-1}$

តែ $z_1 = u_1 + iv_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4}$

និង $q = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4}$

គេបាន $z_n = (\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})^n$

ដូចនេះ $z_n = \cos\frac{n\pi}{4} + i.\sin\frac{n\pi}{4}$ (រូបមន្តដឺម័រ)

ខ. សំដែង u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n

គេមាន $z_n = u_n + i.v_n$

ដោយ $z_n = \cos\frac{n\pi}{4} + i.\sin\frac{n\pi}{4}$

ដូចនេះ $u_n = \cos\frac{n\pi}{4}$ និង $v_n = \sin\frac{n\pi}{4}$ ។

លំហាត់ទី៤៤

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) និង (v_n) កំណត់ដោយ :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = \sqrt{3} \end{cases} \quad \text{និង} \quad \begin{cases} u_{n+1} = {u_n}^2 - {v_n}^2 \\ v_{n+1} = 2u_n v_n \end{cases} \quad \text{ដែល } n \ge 0$$

ក. គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិច $z_n = u_n + i.v_n$ ។

ចូរស្រាយថា $z_{n+1} = {z_n}^2$ រួចទាញថា $z_n = {z_0}^{2^n}$ ។

ខ. សំដែង u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយថា $z_{n+1} = {z_n}^2$ រួចទាញថា $z_n = {z_0}^{2^n}$:

គេមាន $z_n = u_n + i.v_n$

គេបាន $z_{n+1} = u_{n+1} + iv_{n+1}$

$$= {u_n}^2 - {v_n}^2 + 2iu_n v_n$$

$$= {u_n}^2 + 2iu_n v_n + (iv_n)^2$$

$$= (u_n + iv_n)^2$$

ដូចនេះ $z_{n+1} = {z_n}^2$ ។

ម្យ៉ាងទៀតបើ $n=0$ នោះ $z_1 = z_0{}^2$

បើ $n=1$ នោះ $z_2 = z_1{}^2 = z_0{}^4$

បើ $n=2$ នោះ $z_3 = z_2{}^2 = z_0{}^8$

ឧបមាថាវាពិតដល់តួទី k គឺ $z_k = z_0{}^{2^k}$

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $k+1$ គឺ $z_{k+1} = z_0{}^{2^{k+1}}$

គេមាន $z_{k+1} = z_k{}^2$ តែតាមការឧបមា $z_k = z_0{}^{2^k}$

គេបាន $z_{k+1} = (z_0{}^{2^k})^2 = z_0{}^{2^{k+1}}$ ពិត ។

ដូចនេះ $z_n = z_0{}^{2^n}$ ។

ខ. សំដែង u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n

គេមាន $z_n = z_0{}^{2^n}$ ដោយ $z_0 = u_0 + iv_0 = 1 + i\sqrt{3}$

$$= 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$$

គេបាន $z_n = 2^{2^n}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})^{2^n}$

$$= 2^{2^n}(\cos\frac{2^n\pi}{3} + i\sin\frac{2^n\pi}{3})$$

ដូចនេះ $u_n = 2^{2^n}\cos\frac{2^n\pi}{3}\ ;\ v_n = 2^{2^n}\sin\frac{2^n\pi}{3}$ ។

ជំពូកទី៣

លំហាត់អនុវត្តន៍

1. ចូរសរសេរចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមជាទម្រង់ពីជគណិត $\mathbf{a+i.b}$:

ក. $(2-5i)(3+i)$ ខ. $(1-i)(1+i)$

គ. $(1+i)(1-2i)(1+3i)$ ឃ. $(2-i)^3$

ង. $\dfrac{1}{4+3i}$ ច. $\dfrac{4+3i}{4-3i}$

ឆ. $\dfrac{(3+2i)(i+1)}{i-1}$ ជ. $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^2$

ឈ. $\dfrac{13+12i}{6i-8}+\dfrac{(2i+1)^2}{2+i}$ ញ. $\dfrac{(i\sqrt{2}-\sqrt{3})(i\sqrt{3}-\sqrt{2})}{1-i}$

2. គណនា $(1+2i)^3$ និង $(3i-4)^4$

3. គេឱ្យ $\mathbf{x}$ ជាចំនួនពិត ។ កំណត់ $\mathbf{x}$ ដើម្បីឱ្យ $\dfrac{3+i}{1+i}+\dfrac{x-i}{1-i}$ ជាចំនួនពិត ។

4. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1=3+2i$ និង $z_2=2+4i$ ។

ចូរកំណត់រូបភាពនៃ z_1+z_2 , z_1-z_2 និង $2z_2$?

5. គេឱ្យ $z_1=2-i$, $z_2=-1-2i$ និង $z_2=-1+3i$

ក-គណនា ${z_1}^3+{z_2}^3+{z_3}^3$ និង $z_1\times z_2\times z_3$

ខ-បង្ហាញថា ${z_1}^3+{z_2}^3+{z_3}^3=3z_1z_2z_3$

6. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិចពីរ $z_1 = a + i.b$ និង $z_2 = b - i.a$

ដែល a និង b ជាពីរចំនួនពិត ។

ចូរកំនត់តម្លៃរបស់ a និង b ដើម្បីឱ្យ $Z_1 + Z_2 = 7 + 5i$ ។

7. កំនត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យ $(2-3i)$ ជាឬសនៃសមីការ $x^2 + ax + b = 0$

8. កំនត់ចំនួនពិត p និង q ដើម្បីឱ្យ $1+2i$ ជារឹសរបស់សមីការ $z^3 + pz + q = 0$ ។

9. ក. ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $3 - 4i = (2-i)^2$

ខ. ដោះស្រាយសមីការ $Z^2 - (4+5i)Z - 3 + 11i = 0$ ។

10. ក. ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $-3 - 4i = (1-2i)^2$

ខ. ដោះស្រាយសមីការ $Z^2 - (2+i)^2 Z - 1 + 7i = 0$ ។

11. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $U = 2+3i$, $V = -3+2i$ និង $W = 1-5i$ ។

ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $U^3 + V^3 + W^3 = 3U.V.W$ ។

12. កំនត់ពីរចំនួនពិត x និង y បើគេដឹងថា :

$(1+3i)(x+iy) - (2+i)(x-iy) + 7 = 0$ ។

13. កំនត់ពីរចំនួនពិត x និង y បើគេដឹងថា $(3+2i)x + (1-3i)y = \dfrac{5(1+3i)}{1+2i}$ ។

14. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(z) = \dfrac{z^2 + 2z + 5}{z^2 + 1}$ ដែល $z \neq \pm i$ ។

ចូរគណនា $f(-1+2i)$, $f(1+i)$ និង $f(2-i)$ ។

15. គេឱ្យ $z = 1 + 2i$ និង $U = a + i.b$ ។

ចូរកំនត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យ $U = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4$ ។

16. ក.គេឱ្យ $z = 1 + i$ ។ ចូរគណនា z^2 ។

ខ. គណនាផលបូក $S = 1 + z + z^2 + z^3 + ... + z^{2006}$ ។

17. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z = x + i.y$, $x \in IR$, $y \in IR$

មានកុំផ្លិចឆ្លាស់តាងដោយ $\overline{Z}$ ។

ចូរកំនត់រកតម្លៃ x និង y ដើម្បីឱ្យ $(1+i)Z + (3-2i)\overline{Z} = \dfrac{2(9+2i)}{1-i}$

18. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $A = \dfrac{1+5i}{3+2i}$, $B = \dfrac{-2+6i}{1+i}$ និង $C = \dfrac{8+6i}{1-i}$

ក. ចូរសរសេរ A , B , C ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ខ. ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $B^2 - 4A.C = 4(2-i)^2$ ។

គ. ដោះស្រាយសមីការ $A\ Z^2 + B\ Z + C = 0$ ដោយសរសេរឬសនីមួយៗ

ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

19. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z = (x^2 - y^2) + 2ixy$ និង $U = 3 + 4i$ ។

ក. ចូរសរសេរ U^3 ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ខ. កំនត់ចំនួនពិត x និង y ដើម្បីឱ្យ $Z = U^3$ ។

20. ក. ចូរបង្ហាញថា $-77 - 36i = (2-9i)^2$

ខ. ដោះស្រាយសមីការ $(2+i)z^2 - (8-i)z + 5(3-i) = 0$

រួចសរសេរឬសនីមួយៗជាទម្រង់ពីជគណិត ។

21. ចូរគណនាឬសការេនៃចំនួនកុំផ្លិច $Z = 45 + 28i$ ។

22. ចូរគណនាឬសការេនៃចំនួនកុំផ្លិច $Z = -40 - 42i$ ។

23. គេឱ្យ $Z = \dfrac{1+\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{2}-i}$ ។

ចូរសរសេរ Z ជាទម្រង់ពីជគណិត រួចគណនា Z^2 ។

24. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = a + b.i \ , a,b \in IR$ ។

ចូរកំនត់តម្លៃ a និង b ដើម្បីឱ្យ $\dfrac{1}{6}z^2 + \dfrac{2}{3}z = -2 + i$ ។

25. គេឱ្យសមីការ $(E) : z^3 - (4+5i)z^2 - 5(1-3i) + 2(7-i) = 0$ ។

ក. កំនត់ចំនួនពិត b ដើម្បីឱ្យ $z_0 = bi$ ជាឬសសមីការ (E) ។

ខ. ចូរសរសេរសមីការ (E) ជារាង $(z - z_0)(z^2 + pz + q) = 0$

ដែល p និង q ជាចំនួនកុំផ្លិចត្រូវរក ។

គ. ដោះស្រាយសមីការ (E) ក្នុងសំណុំកុំផ្លិច ។

26. គេឱ្យបីចំនួនកុំផ្លិច :

$U = \alpha + i.x \ , V = \beta + i.y \ , \ W = \delta + i.z \ \ , \alpha,\beta,\delta,x,y,z \in IR$ ។

ចូរបង្ហាញថា $U^3 + V^3 + W^3 = 3U.V.W$ លុះត្រាតែ $\begin{cases} \alpha + \beta + \delta = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

27. គេឱ្យសមីការ $(E) : z^3 + az^2 + bz + c = 0$ ។

ចូររកចំនួនពិត a,b,c ដើម្បីឱ្យ $z = 1$ និង $z = 1 + 2i$ ជាឬសសមីការ (E) ។

28. គេមានសមីការ $(E): z^2 - 3z + 4 + 6i = 0$

ក-កំនត់ចំនួនពិត b ដើម្បីឱ្យ $z_0 = b.i$ ជាឬសរបស់សមីការ (E) ។

ខ-ចូរដោះស្រាយសមីការ (E) ក្នុងសំណុំកុំផ្លិច ។

29. គេមានសមីការ $(E): z^2 - 5(1+i)z - 3(4-3i) = 0$

ក-ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $48 + 14i = (7+i)^2$

ខ-ចូរដោះស្រាយសមីការ (E) ក្នុងសំណុំកុំផ្លិច ។

30. គេមានសមីការ $(E): z^2 - (a + i.b)z + a - 3 + 5i = 0$

ដែល $a, b \in IR$ ។

កំនត់តម្លៃ a និង b ដើម្បីឱ្យ $z_1 = 3 + 2i$ ជាឬសមួយរបស់សមីការ (E)

រួចចូរកំនត់រកឬស z_2 មួយទៀតចំពោះតម្លៃ a និង b ដែលបានរកឃើញ ។

31. គេមានសមីការ $(E): z^3 - (5+i)z^2 + (10+9i)z - 2(1+8i) = 0$ ។

ក-កំនត់ចំនួនពិត b ដើម្បីឱ្យ $z_0 = b.i$ ជាឬសរបស់សមីការ (E) ។

ខ-ចូរសរសេរសមីការ (E) ជារាង $(z - z_0)(z^2 + pz + q) = 0$

ដែល p និង q ជាចំនួនកុំផ្លិចពីរដែលគេត្រូវរក ។

គ-ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $-8 + 6i = (1+3i)^2$ រួចដោះស្រាយសមីការ(E) ក្នុងសំណុំកុំផ្លិច ។

32. ចូរដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមក្នុងសំណុំកុំផ្លិច :

$a/$ $iz^2 + (2-3i)z - (1-5i) = 0$

$b/$ $(2-i)z^2 - 5(1+i)z - 2(3+4i) = 0$

$c/$ $(1+i)z^2 - (1+7i)z - 2(2-3i) = 0$

33. បង្កើតសមីការដឺក្រេទីពីរដែលមាន α និង β ជាឬសក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម :

ក. $\mathbf{a/}\ \ \alpha = 2+11i\ \ ,\ \beta = 2-11i$

$\mathbf{b/}\ \alpha = -2-3i\ \ ,\beta = -2+3i$

ខ. $\mathbf{a/}\ \ \alpha = 3+2i\ \ ,\ \beta = 1-3i$

$\mathbf{b/}\ \alpha = 2+3i\ \ ,\beta = 3-2i$

គ. $\mathbf{a/}\ \alpha = -1+2i\ \ ,\ \beta = 3-2i$

$\mathbf{b/}\ \alpha = -\sqrt{3}-i\ \ \ ,\ \beta = 1+i\sqrt{3}$

34. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $\alpha = 1+3i$ និង $\beta = 1-2i$ ។

ចូរសរសេរសមីការដឺក្រេទីពីរមួយដែលមាន $Z_1 = \alpha^2+\beta^2$

និង $Z_2 = \alpha^2.\beta^2$ ជាឬស.

35. ចូរកំនត់រកចំនួនកុំផ្លិចដែលមានម៉ូឌុលស្មើ 8 ហើយការេរបស់វាជាចំនួននិម្មិតសុទ្ធ ។

36. ចូរកំនត់ពីរចំនួនពិត x និង y បើគេដឹងថា :

$$(1+i)(x+iy)+(3-2i)(x-iy) = \frac{8-9i}{1+2i}$$ ។

37. ចូរកំនត់ពីរចំនួនពិត x និង y បើគេដឹងថា :

$$(3+2i)(x+y)+(1-2i)(x-y) = \frac{5-13i}{1-i}$$ ។

38. គេមានសមីការ $(E):\ \ az^2+bz+c=0\ ,\ a\neq 0\ ,\ a,b,c\in IR$ ។

ចូរបង្ហាញថាបើ z_0 ជាឬសសមីការ (E) នោះ $\bar{z}_0$ ក៏ជាឬសរបស់ (E) ដែរ ។

39. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $\alpha = \dfrac{1+i\sqrt{5}}{2}$ និង $\beta = \dfrac{1-i\sqrt{5}}{2}$ ។

ក-ចូរបង្កើតសមីការដឺក្រេទីពីរមួយដែលមាន α និង β ជាឫស ។

ខ-គេតាង $S_n = \alpha^n + \beta^n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ទំនាក់ទំនង $S_{n+2} - S_{n+1} + \dfrac{3}{2}S_n = 0$?

គ-ដោយមិនបាច់ពន្លាតចូរគណនា $N = \left(\dfrac{1+i\sqrt{5}}{2}\right)^{10} + \left(\dfrac{1-i\sqrt{5}}{2}\right)^{10}$ ។

40. គេមានសមីការ $(E)\ : z^2 - (\alpha+\beta)iz - \alpha\beta = 0\ ,\ \alpha,\beta \in IR^*$

ចូរបង្ហាញថាសមីការ (E) ឫសពីរសុទ្ធតែជាចំនួននិម្មិតសុទ្ធដែលគេនឹងបញ្ជាក់ ។

41. គេមានសមីការដឺក្រេទីពីរ $(E) :\quad Az^2 + Bz + C = 0$

ដែល $A \neq 0$ ហើយ A, B, C ជាចំនួនកុំផ្លិច ។

ក. បង្ហាញថាបើ $A - C = i.B$ នោះសមីការ (E) មានឫសពីរកំនត់ដោយ :

$z_1 = i\ ,\ z_2 = -i.\dfrac{C}{A}$ ។

ខ. បង្ហាញថាបើ $A - C = -i.B$ នោះសមីការ (E) មានឫសពីរកំនត់ដោយ :

$z_1 = -i\ ,\ z_2 = i.\dfrac{C}{A}$ ។

គ. អនុវត្តន៏ : ចូរដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមក្នុងសំណុំកុំផ្លិច :

$a/\ (1+i)z^2 - (2+3i)z - 2 + 3i = 0$

$b/\ (1-2i)z^2 + (1+2i)z - (1+i) = 0$

42. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z_1 = 1 + 2i$ និង $Z_2 = 3 - i$ ។

ចូរកំនត់រកផ្នែកពិត និងផ្នែកនិម្មិតនៃចំនួនកុំផ្លិច W បើគេដឹងថា $\frac{1}{W} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$ ។

43. គេមានចំនួនកុំផ្លិច α និង β ដែល $\alpha + \beta = 3 - 2i$ និង $\alpha.\beta = 5(1 - i)$ ។

ចូរកំនត់ផ្នែកពិត និង ផ្នែកនិម្មិតនៃ $Z = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$ ។

44. គេមានសមីការ $(E): i.Z^2 - (2 + 3i)Z + 5(1 + i) = 0$

ក. កំនត់ចំនួនពិត a ដើម្បីឱ្យ $Z_1 = a + i$ ជាឫសមួយរបស់សមីការ (E) រួចគណនាឫស Z_2 មួយទៀតរបស់សមីការ ។

ខ. ចូរកំនត់ចំនួនពិត p និង q ដើម្បីឱ្យ $\frac{p}{Z_1} + \frac{q}{Z_2} = \frac{p + q - 2}{Z_1 + Z_2}$ ។

45. គេមានចំនួនកុំផ្លិចពីរ Z_1 និង Z_2 ដែល $Z_1 + Z_2 = 3 + i$

និង $Z_1.Z_2 = 4 + 3i$ ។

ក. ចូរបង្ហាញថា $(Z_1)^2 + (Z_2)^2 = 0$ ។

ខ. ចូរកំនត់រកផ្នែកពិត និង ផ្នែកនិម្មិត នៃ $Z = Z_1{}^4 + Z_2{}^4$ ។

គ. ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $(Z_1 + Z_2)^2 - 4Z_1.Z_2 = -(Z_1 + Z_2)^2$

រួចកំនត់រក Z_1 និង Z_2 ។

46. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $Z_1 = x^2 + i\,xy$ និង $Z_2 = y^2 - ixy$ ដែល $x, y \in IR$ ។

ចូរកំនត់ x និង y ដើម្បីឱ្យ $Z_1 - Z_2 = (\sqrt{2006} + i\sqrt{2007})^2$ ។

47. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច :

$$Z_1=(a-b)+i(b-c)\ ,\ Z_2=(b-c)+i(c-a)$$

និង $Z_2=(c-a)+i(a-b)$ ដែល a , b , c ជាបីចំនួនពិតខុសគ្នា។

ចូរបង្ហាញថា $Z_1{}^3+Z_2{}^3+Z_3{}^3=3Z_1.Z_2.Z_3$

48. ចូរគណនាឫសការេនៃចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម :

ក. $a/\ Z=48+14i$ $\qquad b/Z=-24-10i$

ខ. $a/Z=-40+42i$ $\qquad b/Z=77-36i$

គ. $a/Z=55-48i$ $\qquad b/Z=1+i\sqrt{6}$

49. ចូរសរសេរចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ :

ក. $a/Z=1+i\sqrt{3}$ $\qquad b/Z=-2\sqrt{3}+2i$

ខ. $a/Z=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$ $\qquad b/Z=-\sqrt{3}-3i$

គ. $a/Z=\dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ $\qquad b/Z=2+2i$

ឃ. $a/Z=-1-\dfrac{i}{\sqrt{3}}$ $\qquad b/Z=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

ង. $a/Z=1+\sqrt{2}+i$ $\qquad b/Z=2-\sqrt{3}+i$

50. ចូរសរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម :

ក. $a/Z=1+\cos\dfrac{4\pi}{9}+i.\sin\dfrac{4\pi}{9}$ $\ b/Z=1+\sin\dfrac{\pi}{10}+i.\cos\dfrac{\pi}{10}$

ខ. a/ $Z=\sin\frac{2\pi}{7}+i(1-\cos\frac{2\pi}{7})$ b/ $Z=1-\cos\frac{4\pi}{5}-i\sin\frac{4\pi}{5}$

គ. a/ $Z=\sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{5}}+i.\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{5}}$

b/ $Z=1+i\tan\frac{\pi}{7}$

ឃ. a/ $Z=-\sin\frac{\pi}{10}-i.\cos\frac{\pi}{10}$

b/ $Z=(\sqrt{3}-2)(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8})$

ង. $Z=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{4}}}}+i.\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{4}}}}$ ។

51. ចូរដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមរួចសរសេរឫសនីមួយៗជារាងត្រីកោណមាត្រ ៖

ក. a/ $z^2-2z+4=0$ b/ $2z^2-2z+1=0$

ខ. a/ $z^2+\sqrt{3}.z+1=0$ b/ $z^2+z+1=0$

52. ចូរសរសេរ $Z=\sqrt{2+\sqrt{3}}+i.\sqrt{2-\sqrt{3}}$ ជារាងត្រីកោណមាត្រ ។

53. ចូរសរសេរ $Z=\sqrt{2-\sqrt{2}}+i\sqrt{2+\sqrt{2}}$ ជារាងត្រីកោណមាត្រ ។

54. ក-គណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\sin\frac{\pi}{10}$, $\cos\frac{\pi}{10}$ និង $\tan\frac{\pi}{10}$ ។

ខ-ទាញរកទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ $Z=1+i.\sqrt{5-2\sqrt{2}}$ ។

55. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{2}$ និង $z_2 = 1+i$

ក. ចូរសរសេរ $Z = \frac{z_1}{z_2}$ ជាទម្រង់ $a+b.i$ ។

ខ. ចូរសរសេរ z_1 , z_2 និង $Z = \frac{z_1}{z_2}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

គ. ដោយប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}$ ។

56. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ និង $z_2 = 2\sqrt{3}+2i$ ។

ក. ចូរសរសេរ $Z = z_1.z_2$ ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ខ. ចូរសរសេរ z_1 , z_2 និង $Z = z_1.z_2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

គ. ដោយប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{5\pi}{12}$ និង $\sin\frac{5\pi}{12}$ ។

57. គេឱ្យ $z = -1-i$ ។ ចូរសរសេរ z និង z^{2007} ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

58. គេឱ្យ $z = -\sqrt{3}+i$ ។ ចូរសរសេរ z និង z^{2007} ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

59. គេឱ្យ $z = \frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$ ។ ចូរសរសេរ z និង z^{2007} ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

60. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z = 2+\sqrt{3}+i$

ក-ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថាម៉ូឌុល $|Z| = \sqrt{6}+\sqrt{2}$ ។

ខ-បង្ហាញថា $Z = 2(1+\cos\frac{\pi}{6}+i.\sin\frac{\pi}{6})$ រួចទាញរកទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ Z ។

គ-ទាញបង្ហាញថា $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ។

61. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=\sqrt{2}+1+i$

ក-ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថាម៉ូឌុល $|Z|=\sqrt{2}.\sqrt{2+\sqrt{2}}$ ។

ខ-បង្ហាញថា $Z=\sqrt{2}(1+\cos\frac{\pi}{4}+i.\sin\frac{\pi}{4})$

រួចទាញរកទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ Z ។

គ-ទាញបង្ហាញថា $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ ។

62. គេមានចំនួនកុំផ្លិច :

$Z_1=\frac{\sqrt{3}+i}{2}$ និង $Z_2=(\sqrt{3}+1)+i(\sqrt{3}-1)$ ។

ក. ចូរសរសេរ $U=Z_1.Z_2$ ជារាងពីជគណិត ។

ខ. ចូរសរសេរ U និង Z_1 ជារាងត្រីកោណមាត្រ រួចទាញរកម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់

នៃចំនួនកុំផ្លិច Z_2 ។

គ.ចូរទាញបង្ហាញថា $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ។

63. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ។

ចូររកម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច $U=\frac{z^{2012}}{1+z^2}$ ។

64. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z_n = \dfrac{n^2+n-1-i(2n+1)}{(n^2+n-1)^2+(2n+1)^2}$

ដែល n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ។

ក. បង្ហាញថា $Z_n = \dfrac{1}{n+i} - \dfrac{1}{n+1+i}$ ។

ខ. គណនា $S_n = Z_0 + Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$ ដោយសរសេរលទ្ធផល

ដែលបានជារាងពីជគណិត ។

65. គេមានស្វ៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិច (Z_n) កំនត់ដោយ :

$Z_0 = \dfrac{3+i\sqrt{3}}{2}$ និង $Z_{n+1} = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}Z_n - \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$ ដែល $n \in \mathrm{IN}$ ។

ក. គេតាង $U_n = Z_n - 1$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathrm{IN}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $U_{n+1} = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}.U_n$, $\forall n \in \mathrm{IN}$

ខ. ចូរសរសេរ U_n ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

គ. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$Z_n = 2\cos\frac{(n+1)\pi}{6}\left[\cos\frac{(n+1)\pi}{6} + i.\sin\frac{(n+1)\pi}{6}\right]$$

ឃ. ចូរកំនត់ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ Z_n ។

66. បើ z ជាចំនួនកុំផ្លិចដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង :

$z^{2n} = (1+z)^n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathrm{IN}$ នោះចូរស្រាយបញ្ជាក់

ថាចំនួនកុំផ្លិច z និង $1+\dfrac{1}{z}$ មានម៉ូឌុលស្មើគ្នា ។

67. ដោះស្រាយសមីការ $z^3+\overline{z}^3+i|z|^2=1+i$ ។

68. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $\alpha=\dfrac{1+i\sqrt{7}}{2}$ និង $\beta=\dfrac{1-i\sqrt{7}}{2}$

ក. សរសេរសមីការដឺក្រេទីពីរដែលមាន α , β ជាឫស ។

ខ. តាង $\forall n\in Z: S_n=\alpha^n+\beta^n$ ។

ចូរស្រាយថា $S_{n+2}-S_{n+1}+2S_n=0$?

69. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច : $\begin{cases} Z_1=a_1+i.b_1 \\ Z_2=a_2+i.b_2 \\ Z_3=a_3+i.b_3 \end{cases}$ ដែល $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$

ជាចំនួនពិត ។ ក្នុងលំហប្រកបដោយតំរុយអរតូនរម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយដែល $\overrightarrow{AB}(a_1, a_2, a_3)$ និង $\overrightarrow{AC}(b_1, b_2, b_3)$ ។

ក.ចូរកំនត់ប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC កាលណាគេមានទំនាក់ទំនង

$Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2=0$ ។

ខ. ចូរស្រាយថាបើ ABC ជាត្រីកោណកែងសមបាទកំពូល A

នោះគេបាន $(Z_1.Z_2.Z_3)^2=\dfrac{Z_1^6+Z_2^6+Z_3^6}{3}$ ។

70. គេឱ្យចំនួនពិត x ដែល $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ , k \in Z$

ក. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$1 - 3\tan^2 x + i.(3\tan x - \tan^3 x) = \frac{\cos 3x + i\sin 3x}{\cos^3 x}$$

ខ. ប្រើទំនាក់ទំនងខាងលើចូរទាញបង្ហាញថា :

$$\tan 3x = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$$

គ. ចូរសរសេរ $\tan(\frac{\pi}{3} - x)$ និង $\tan(\frac{\pi}{3} + x)$ ជាអនុគមន៍នៃ $\tan x$ ។

ឃ. ទាញឱ្យបានថា $\tan(\frac{\pi}{3} - x)\tan(\frac{\pi}{3} + x) = \frac{\tan 3x}{\tan x}$ ។

ង.ចូរគណនាផលគុណ $P_n = \prod_{k=0}^{n} [\tan(\frac{\pi}{3} - 3^n a).\tan(\frac{\pi}{3} + 3^n a)]$ ។

71. ដោះស្រាយសមីការ $|z| - i.z = 1 - 3i$ ដែល z ជាចំនួនកុំផ្លិច ។

72. ដោះស្រាយសមីការ $\log_5(z.\bar{z}) + z = 3\ (1 + 2i)$ ។

73. ដោះស្រាយសមីការ $|z - 1 + i| + iz = 22 + 4i$ ។

74. គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិច (Z_n) កំនត់ដោយ :

$$Z_0 = 1 \text{ និង } Z_{n+1} = \frac{1}{2}(\ Z_n + |\ Z_n\ |\ ) \quad \text{ដែល } n \in IN$$

គណនា Z_n ដោយសរសេរលទ្ធផលក្រោមទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

75. សរសេរចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{z = \dfrac{\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}}{\cos\frac{4\pi}{9} + i\sin\frac{4\pi}{9}}}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

76. សរសេរចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{z = \dfrac{1+\sin\alpha + i\cos\alpha}{1+\sin\alpha - i\cos\alpha}}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

77. នៅក្នុងប្លង់កុំផ្លិច $\mathbf{(xoy)}$ តាមចំណុច $\mathbf{M'(z')}$ ជារូបភាពនៃ $\mathbf{M(z=-4+4i)}$

តាមបំលែងវិលផ្ចិត $\mathbf{O}$ និងមុំ $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ ។ ចូរកំណត់ $\mathbf{z'}$?

78. បង្ហាញថា $\mathbf{(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4})}$ ។

79. បង្ហាញថា $\mathbf{(\sqrt{3}-i)^n = 2^n(\cos\frac{n\pi}{6} - i.\sin\frac{n\pi}{6})}$ ។

80. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{z = \cos\frac{\pi}{6} + i.\sin\frac{\pi}{6}}$

ក. ដៅចំនុច $\mathbf{z, z^2, z^3, z^4, z^5, z^6, z^7}$ លើរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ខ. កំណត់តម្លៃ $\mathbf{1+z+z^2+z^3+z^4+....+z^{11}}$ ។

81. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{3-2i}$ និង $\mathbf{4+5i}$ ដែលមានរូបភាពតាងដោយចំណុចរៀងគ្នា $\mathbf{A}$ និង $\mathbf{B}$ ។

ក. គណនាប្រវែង $\mathbf{AB}$

ខ. រកកូអរដោនេចំណុចកណ្តាល $\mathbf{AB}$ ។

82. ចំណុច $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ និង $\mathbf{C}$ ជារូបភាពរៀងគ្នានៃចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{2+i}$, $\mathbf{-1}$ និង $\mathbf{3-2i}$ ។
ប្រាប់ប្រភេទនៃត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ ។

83. ចូររក និង សង់សំណុំចំណុច $\mathbf{M}$ មានអាហ្វិក $\mathbf{z}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌខាងក្រោម :

ក. $|\mathbf{z-1-i}| = \sqrt{\mathbf{2}}$ ខ. $|\mathbf{2z-3+2i}| = \mathbf{4}$

គ. $|\bar{\mathbf{z}}+\mathbf{i}| = \mathbf{2}$ ឃ. $\left|\dfrac{\mathbf{z-i}}{\mathbf{z-1}}\right| = \mathbf{1}$

ង. $\left|\dfrac{\mathbf{z-i}}{\mathbf{z-1}}\right| = \mathbf{2}$ ច. $\left|\dfrac{\mathbf{iz+1}}{\mathbf{z+2i}}\right| = \mathbf{1}$

84.ក-ចំពោះគ្រប់ចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{z_1}$ និង $\mathbf{z_2}$ ចូរបង្ហាញថាគេមានសមភាព :

$$\mathbf{2\,(\,|z_1|^2+|z_2|^2) = |z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2}$$

ខ-ចូរបកស្រាយសមភាពនេះតាមបែបធរណីមាត្រ ។

85. ចូរកំណត់ចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{z}$ ដោយដឹងថា $|\mathbf{z}| = \left|\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{z}}\right| = |\mathbf{1}+\bar{\mathbf{z}}|$ ។

86. ចូរដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំកំផ្លិច $\mathbf{z^6} = \dfrac{\mathbf{1+i}}{\sqrt{\mathbf{3}}+\mathbf{i}}$ ។

87. គេឱ្យ $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{4\pi}{7}}$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{\omega}{1+\omega^2}+\frac{\omega^2}{1+\omega^4}+\frac{\omega^3}{1+\omega^6} = -2$$

88. ដោះស្រាយក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{z^6 = 8i}$ រួចទាញរកតម្លៃ $\mathbf{\cos\dfrac{\pi}{12}}$ និង $\mathbf{\sin\dfrac{\pi}{12}}$

89. គេឱ្យ $\mathbf{z = x + i.y}$ ដែល $\mathbf{x, y \in IR}$ ។ បង្ហាញថា $|\sqrt{\mathbf{2}}\mathbf{z}| \ge |\mathbf{x}|+|\mathbf{y}|$ ។

ឯកសារយោង

1. សៀវភៅគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី ១១ កំរិតខ្ពស់របស់ក្រសួងអប់រំយុវជន និងកីឡា
   (បោះពុម្ពឆ្នាំ ២០០៩)
2. សៀវភៅគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី ១២ របស់ក្រសួងអប់រំយុវជន និងកីឡា
   (បោះពុម្ពឆ្នាំ ២០០១)
3. Mathématiques Géométrie (Terminales C et E)
   (Genevieve HAYE , Bernard RANDÉ , Eric SERRA)
4. Complex Numbers from A to…Z
   (Titu Andreescu , Dorin Andrica)