លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ

បរិញ្ញាបត្រផ្នែកគណិតវិទ្យា

សិក្សាគណិតវិទ្យាដោយខ្លួនឯង

ចំនួនកុំផ្លិច

សម្រាប់ថ្នាក់ទី ១០_១១

សិស្សពូកែ និង អាហារូបករណ៍

$$(a+i.b)(c+i.d)=(ac-bd)+i.(ad+bc)$$

អ្នកចូលរួមត្រួតពិនិត្យបច្ចេកទេស

លោក លឹម ឆុន

លោក សែន ពិសិដ្ឋ

លោកស្រី ទុយ រីណា

លោក និត្យ ម៉េង

លោក ព្រឹម សុនិត្យ

លោក ផល ប៊ុនឆាយ

អ្នកត្រួតពិនិត្យអក្ខរាវិរុទ្ធ

លោក លឹម មិត្តសិរ

ការីកុំព្យូទ័រ

កញ្ញា លី គុណ្ណាកា

អ្នកនិពន្ធ និង រៀបរៀង

លោក លឹម ផល្លុន និង លោក សែន ពិសិដ្ឋ

ចំនួនកុំផ្លិច

១~និយមន័យ

ក. ចំនួននិម្មិត

ផលគុណនៃចំនួនពិត $\mathbf{c}$ ខុសពីសូន្យនឹង $\mathbf{i}$ ហៅថាចំនួននិម្មិត ។

$\mathbf{i}$ ហៅថាឯកតានិម្មិតដែល $\mathbf{i^2=-1}$ ឬ $\mathbf{i=\sqrt{-1}}$ ។

ឧទាហរណ៍ : $\mathbf{2i, -5i, \frac{2i}{3}, \sqrt{3}i, ...}$ ហៅថាចំនួននិម្មិត ។

ខ. និយមន័យចំនួនកុំផ្លិច

ចំនួនកុំផ្លិចជាចំនួនដែលមានរាង $\mathbf{z=a+i.b}$ ដែល $\mathbf{a}$ និង $\mathbf{b}$ ជាចំនួនពិត ។

គេតាងសំណុំនៃចំនួនកុំផ្លិចដោយ $\mathbb{C}$ ។

$\mathbf{a}$ ហៅថាផ្នែកពិតនៃ $\mathbf{z=a+i.b}$ ដែលកំណត់តាងដោយ $\mathbf{Re(z)=a}$ ។

$\mathbf{b}$ ហៅថាផ្នែកនិម្មិតនៃ $\mathbf{z=a+i.b}$ ដែលកំណត់តាងដោយ $\mathbf{Im(z)=b}$ ។

ឧទាហរណ៍១ : $\mathbf{1+2i\ ,\ -3+2i\ ,\ 4-3i\ ,\ -1-4i, 5i\ , -7i}$

ហៅថាចំនួនកុំផ្លិច ។

ឧទាហរណ៍២: រកផ្នែកពិត និង ផ្នែកនិម្មិតនៃ $\mathbf{z=3+2i}$?

ផ្នែកពិត និង ផ្នែកនិម្មិតនៃ $\mathbf{z=3+2i}$ គឺ $\mathbf{Re(Z)=3\ ;\ Im(z)=2}$ ។

២~ប្រមាណវិធីលើចំនួនកុំផ្លិច

ក. វិធីបូកចំនួនកុំផ្លិច

ឧបមាថាគេមានពីរចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = a + i.b$ និង $z_2 = c + i.d$

ដែល a, b, c, d ជាចំនួនពិត ។

គេបាន $z_1 + z_2 = (a + i.b) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$

ដូចនេះ $z_1 + z_2 = (a + c) + i.(b + d)$ ។

ឧទាហរណ៍ : គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = -3 + 2i$ និង $z_2 = 7 - 5i$ ។

គណនា $z_1 + z_2$

គេបាន $z_1 + z_2 = (-3 + 2i) + (7 - 5i) = (-3 + 7) + (2i - 5i)$

ដូចនេះ $z_1 + z_2 = 4 - 3i$ ។

ខ. វិធីដកចំនួនកុំផ្លិច

ឧបមាថាគេមានពីរចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = a + i.b$ និង $z_2 = c + i.d$

ដែល a, b, c, d ជាចំនួនពិត ។

គេបាន $z_1 - z_2 = (a + i.b) - (c + id) = (a - c) + i(b - d)$

ដូចនេះ $z_1 + z_2 = (a - c) + i.(b - d)$ ។

ឧទាហរណ៍ : គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = -3 + 2i$ និង $z_2 = 7 - 5i$ ។

គណនា $z_1 - z_2$

គេបាន $z_1 - z_2 = (-3 + 2i) - (7 - 5i) = (-3 - 7) + (2i + 5i)$

ដូចនេះ $z_1 + z_2 = -10 + 7i$ ។

គ. វិធីគុណចំនួនកុំផ្លិច

ឧបមាថាគេមានពីរចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = a + i.b$ និង $z_2 = c + i.d$

ដែល a, b, c, d ជាចំនួនពិត ។

គេបាន $z_1 \times z_2 = (a + i.b)(c + i.d)$

$$= ac + iad + ibc + i^2bd$$

$$= ac + iad + ibc - bd$$

$$= (ac - bd) + i(ad + bc)$$

ដូចនេះ $z_1 \times z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc)$ ។

ឧទាហរណ៍ : គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 2 + i$ និង $z_2 = 1 - 3i$ ។ គណនា $z_1 \times z_2$

គេបាន $z_1.z_2 = (2 + i)(1 - 3i) = 2 - 6i + i - 3i^2 = 5 - 5i$

ដូចនេះ $z_1.z_2 = 5 - 5i$ ។

ឃ. វិធីចែកចំនួនកុំផ្លិច

ឧបមាថាគេមានពីរចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = a + i.b$ និង $z_2 = c + i.d$

ដែល a, b, c, d ជាចំនួនពិត ។

គេបាន $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a + ib}{c + id} = \dfrac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \dfrac{ac - iad + ibc - i^2bd}{c^2 - i^2d^2}$

$$= \frac{ac - iad + ibc + bd}{c^2 + d^2} = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2}$$

ដូចនេះ $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i.\dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2}$ ។

ឧទាហរណ៍ : គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 1 + 5i$ និង $z_2 = 1 + i$ ។ គណនា $\frac{z_1}{z_2}$

គេបាន $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+5i}{1+i} = \frac{(1+5i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i+5i+5}{1+1} = \frac{6+4i}{2}$

ដូចនេះ $\frac{z_1}{z_2} = 3 + 2i$ ។

ង. ស្វ័យគុណនៃ i

គេមានស្វ័យគុណនៃ i ដូចខាងក្រោម :

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2.i = -i$

$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$

$i^5 = i^4.i = i$

$i^6 = i^5.i = i.i = i^2 = -1$

$i^7 = i^6.i = -i$

$i^8 = i^7.i = -i.i = -i^2 = 1$

$- - - - - - - - - - - - - -$

$- - - - - - - - - - - - - -$

ជាទូទៅ $i^{4n} = 1$, $i^{4n+1} = i$, $i^{4n+2} = -1$, $i^{4n+3} = -i$ គ្រប់ $n \in IN$

ដូចនេះចំនួន i^n ស្មើនឹងចំនួនដដែលៗគឺ $i, -1, -i$ និង 1 គ្រប់ $n \in IN$ ។

ច. ស្វ័យគុណនៃចំនួនកុំផ្លិច

គេមានស្វ័យគុណនៃចំនួនកុំផ្លិចដូចខាងក្រោម :

$$(a+ib)^2 = a^2 - b^2 + i.2ab$$

$$(a+ib)^3 = (a^3 - 3ab^2) + i(3a^2b - b^3)$$

$$(a+ib)^4 = (a^4 - 6a^2b^2 + b^4) + i(4a^3b - 4ab^3)$$

−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

$$(a+ib)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)\, a^{n-k} b^k . i^k$$

ដែល $c(n,k) = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ ។

ឧទាហរណ៍ : គណនា $(1+3i)^2$, $(2+i)^3$ និង $(1+2i)^4$ ។

គេបាន :

$$(1+3i)^2 = 1 + 6i - 9 = -8 + 6i$$

$$(2+i)^3 = 8 + 12i - 6 - i = 2 + 11i$$

$$(1+2i)^4 = 1 + 8i - 24 - 32i + 16 = -7 + 24i$$

ឆ. កុំផ្លិចស្មើគ្នា

ឧបមាថា $z_1 = a + ib$ និង $z_2 = c + i.d$ ដែល a, b, c, d ជាចំនួនពិត ។

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

ដូចនេះចំនួនកុំផ្លិចពីរស្មើគ្នាលុះត្រាតែផ្នែកពិតស្មើគ្នា និង ផ្នែកនិម្មិតស្មើគ្នា ។

ឧទាហរណ៍ : គេឱ្យ $z_1 = 2 + 3\lambda + 4i\mu$ និង $z_2 = \mu - 9 + 8i$

ចូរកំណត់ពីរចំនួនពិត λ និង μ ដើម្បីឱ្យ $z_1 = z_2$?

កំណត់ λ និង μ :

$$2 + 3\lambda + 4i\mu = \mu - 9 + 8i \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + 3\lambda = \mu - 9 \\ 4\mu = 8 \end{cases}$$

គេទាញបាន $\mu = 2$, $\lambda = -3$ ។

ជ. គណនាឫសការេនៃចំនួនកុំផ្លិច

ឧបមាថាគេមានចំនួនកុំផ្លិច $z = a + i.b$ ដែល a, b ជាចំនួនពិត

ដើម្បីគណនាឫសការេនៃ z គេត្រូវអនុវត្តន៏ដូចខាងក្រោម :

តាង $w = x + i.y$ ជាឫសការេនៃ $z = a + i.b$ (x, y ជាចំនួនពិត)

គេបាន $w^2 = z$

$$(x + i.y)^2 = a + i.b$$

$$(x^2 - y^2) + i(2xy) = a + ib$$

គេទាញបាន $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$

ដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការនេះគេបានគូចម្លើយ $(x, y) = \{(\alpha_1, \beta_1); (\alpha_2, \beta_2)\}$

ដូចនេះ $w_1 = \alpha_1 + i\beta_1$; $w_2 = \alpha_2 + i\beta_2$ ។

ឧទាហរណ៍១ : គណនាឫសការេនៃចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{z = 21 + 20i}$

តាង $\mathbf{w = x + i.y}$ ជាឫសការេនៃ $\mathbf{z = 21 + 20i}$ ($\mathbf{x , y}$ ជាចំនួនពិត)

គេបាន $\mathbf{w^2 = z}$

$$\mathbf{(x + i.y)^2 = 21 + 20i}$$

$$\mathbf{(x^2 - y^2) + i(2xy) = 21 + 20i}$$

គេទាញបាន $\begin{cases} \mathbf{x^2 - y^2 = 21} \\ \mathbf{2xy = 20} \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការនេះគេបានគូចម្លើយ :

$\mathbf{x = 5 , y = 2}$ ឬ $\mathbf{x = -5 , y = -2}$

ដូចនេះ $\mathbf{w_1 = 5 + 2i}$; $\mathbf{w_2 = -5 - 2i}$ ។

ឧទាហរណ៍២ : គណនាឫសការេនៃចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{z = 21 + 20i}$

តាង $\mathbf{w = x + i.y}$ ជាឫសការេនៃ $\mathbf{z = -8 - 6i}$ ($\mathbf{x , y}$ ជាចំនួនពិត)

គេបាន $\mathbf{w^2 = z}$

$$\mathbf{(x + i.y)^2 = -8 - 6i}$$

$$\mathbf{(x^2 - y^2) + i(2xy) = -8 - 6i}$$

គេទាញបាន $\begin{cases} \mathbf{x^2 - y^2 = -8} \\ \mathbf{2xy = -6} \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេបានគូចម្លើយ : $\mathbf{x = 1 , y = -3}$ ឬ $\mathbf{x = -1 , y = 3}$

ដូចនេះ $\mathbf{w_1 = 1 - 3i}$; $\mathbf{w_2 = -1 + 3i}$ ។

៣-ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់

ក. និយមន័យ

ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{z = a + i.b}$, $\mathbf{a;b \in IR}$ គឺជាចំនួនកុំផ្លិចដែល

កំណត់តាងដោយ $\mathbf{\bar{z} = a - i.b}$ ។

ឧទាហរណ៍ : ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ $\mathbf{z = 4 + 3i}$ គឺ $\mathbf{\bar{z} = 4 - 3i}$ ។

ខ. លក្ខណៈ

1. $\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
2. $\overline{(z_1 . z_2)} = \overline{z_1} . \overline{z_2}$
3. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

សម្រាយបញ្ជាក់

តាង $z_1 = a + ib$ និង $z_2 = c + id$ ដែល a, b, c, d ជាចំនួនពិត ។

គេបាន $\overline{z_1} = a - i.b$ និង $\overline{z_2} = c - i.d$

មាន $z_1 + z_2 = (a + c) + i(b + d)$ នោះ $\overline{z_1 + z_2} = (a + c) - i(b + d)$

ហើយ $\overline{z_1} + \overline{z_2} = a - ib + c - id = (a + c) - i(b + d)$

ដូចនេះ $\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ ។

គេមាន $z_1 z_2 = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$

គេបាន $\overline{z_1 . z_2} = (ac - bd) - i(ad + bc)$

ហើយ $\overline{z_1} . \overline{z_2} = (a - ib)(c - id) = (ac - id) - i(ad + bc)$

ដូចនេះ $\overline{(z_1.z_2)} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$ ។

គេមាន $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i.\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$

គេបាន $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} - i.\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$

ហើយ $\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \frac{a-ib}{c-id} = \frac{(a-ib)(c+id)}{(c-id)(c+id)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} - i.\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$

ដូចនេះ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ ។

គ. កន្សោមផ្នែកពិត និង ផ្នែកនិម្មិតជាអនុគមន៍នៃ z និង $\overline{z}$

ឧបមាថាគេមាន $z = a+ib$ នោះ $\overline{z} = a-ib$ ដែល $a;b$ ជាចំនួនពិត ។

គេបាន $z+\overline{z} = a+ib+a-ib = 2a$ នោះ $a = \frac{z+\overline{z}}{2}$

ហើយ $z-\overline{z} = a+ib-a+ib = 2ib$ នោះ $b = \frac{z-\overline{z}}{2i}$

ដូចនេះ $Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$ និង $Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$ ។

-បើ $Re(z) = 0$ នោះ $z = -\overline{z}$ នាំឱ្យ z ជាចំនួននិម្មិត ។

-បើ $Im(z) = 0$ នោះ $z = \overline{z}$ នាំឱ្យ z ជាចំនួនពិត ។

៤-អនុវត្តន៍ចំនួនកុំផ្លិចក្នុងដំណោះស្រាយសមីការដឺក្រេទីពីរ

ឧបមាថាគេមានសមីការដឺក្រេទីពីរ $az^2 + bz + c = 0$

ដែល $a \neq 0$, a, b, c ជាចំនួនពិត ។

ឌីសគ្រីមីណង់នៃសមីការគឺ $\Delta = b^2 - 4ac$

-បើ $\Delta > 0$ សមីការមានឫសពីផ្សេងគ្នាជាចំនួនពិតគឺ :

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \ ; \ z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

-បើ $\Delta = 0$ សមីការមានឫសឌុបជាចំនួនពិតគឺ $z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$

-បើ $\Delta < 0$ សមីការមានឫសពីផ្សេងគ្នាជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នាគឺ :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \ ; \ z_2 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

ឧទាហរណ៍ :

ដោះស្រាយសមីការ $2z^2 - 6z + 5 = 0$

ឌីសគ្រីមីណង់នៃសមីការ $\Delta = 36 - 40 = -4 = 4i^2$

គេទាញឫស $z_1 = \frac{6 - 2i}{4} = \frac{3}{2} - i.\frac{1}{2}$; $z_2 = \frac{6 + 2i}{4} = \frac{3}{2} + i.\frac{1}{2}$

ដូចនេះសមីការមានឫសពីរផ្សេងគ្នាជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នាគឺ :

$z_1 = \frac{3}{2} - i.\frac{1}{2}$; $z_2 = \frac{3}{2} + i.\frac{1}{2}$ ។

៥_ចំនួនកុំផ្លិចក្នុងប្លង់

ក. ការតាងចំនួនកុំផ្លិចក្នុងប្លង់

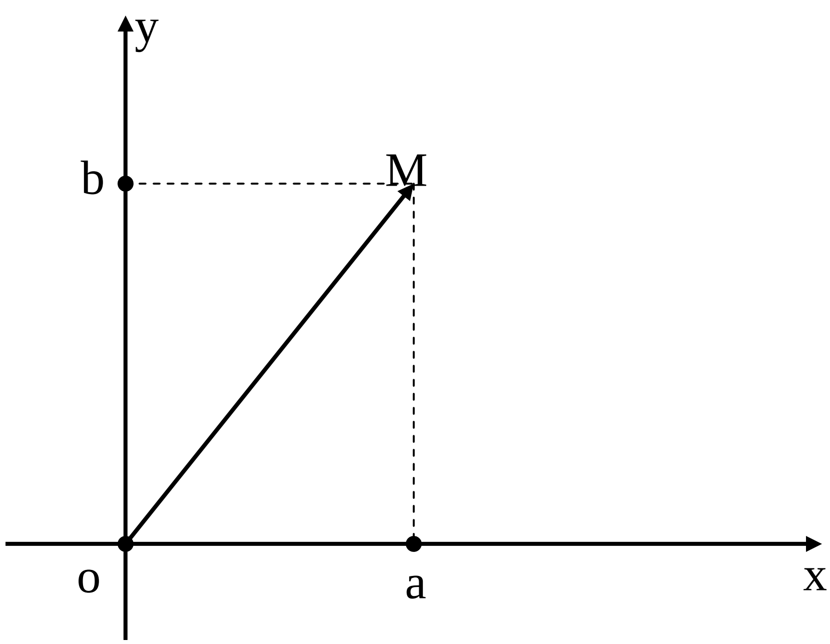
ក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ (xoy) គេអាចតាងចំនួនកុំផ្លិច $z=a+i.b\ ;\ a,b\in IR$ ដោយចំណុច M មួយមានកូអរដោនេ (a,b) ។

គេថា M ជាចំនុចរូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច $z=a+ib$ ហើយ z ហៅថាអាភិចនៃចំនុច $M(a,b)$ ដែលគេកំណត់សរសេរ $M(z)$ ។

ដូចគ្នាដែរ គេក៏អាចតាងចំនួនកុំផ្លិច $z=a+i.b\ ;\ a,b\in IR$ ដោយវ៉ិចទ័រ

$$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{OM}=(a,b)$$ ។

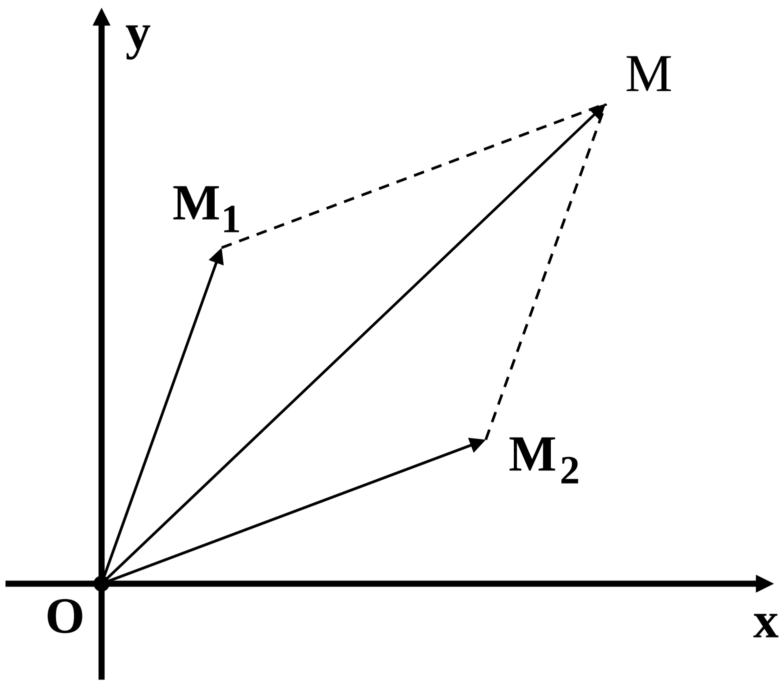
គេថា $\overrightarrow{u}$ ជាវ៉ិចទ័ររូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច $z=a+ib$ ហើយ z ហៅថាអាភិចនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{u}$ ដែលគេកំណត់សរសេរ $\overrightarrow{u}(z)$ ។



ខ. វិចទ័ររូបភាពនៃផលបូកចំនួនកុំផ្លិចក្នុងប្លង់កុំផ្លិច

ក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ (xoy) ឧបមាថាគេមានចំនួនកុំផ្លិចពីរ z_1 និង z_2 ហើយតាង M_1 និង M_2 ជារូបភាពនៃ z_1 និង z_2 ។

គេបាន $\overrightarrow{OM_1}$ និង $\overrightarrow{OM_2}$ ជាវិចទ័ររូបភាពនៃ z_1 និង z_2 ។



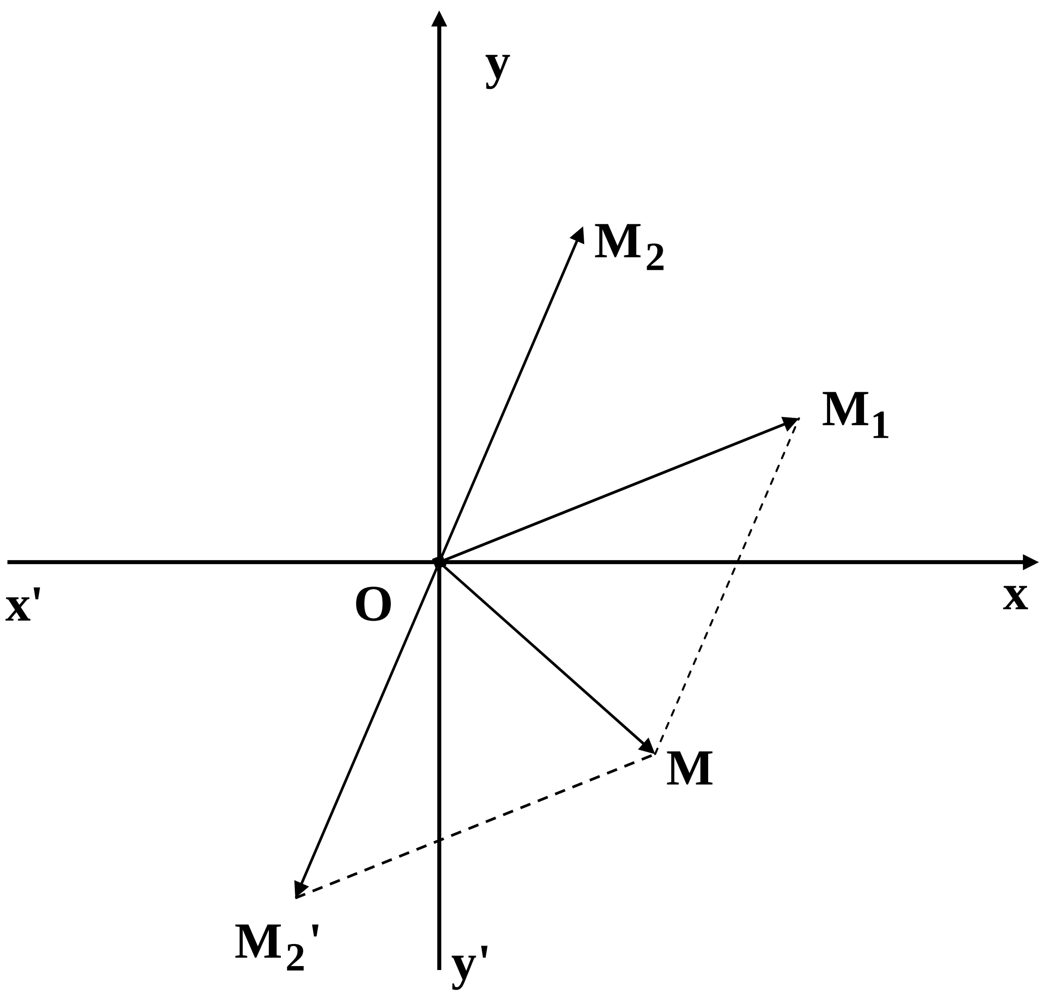
គេមាន $z_1 + z_2 = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM}$

ដូចនេះរូបភាពនៃ $z_1 + z_2$ គឺជាវិចទ័រអង្កត់ទ្រូងនៃប្រលេឡូក្រាម OM_1MM_2 ។

គ. វ៉ិចទ័ររូបភាពនៃផលដកចំនួនកុំផ្លិចក្នុងប្លង់កុំផ្លិច

ក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ **(xoy)** ឧបមាថាគេមានចំនួនកុំផ្លិចពីរ z_1 និង z_2 ហើយតាង M_1 និង M_2 ជារូបភាពនៃ z_1 និង z_2 ។

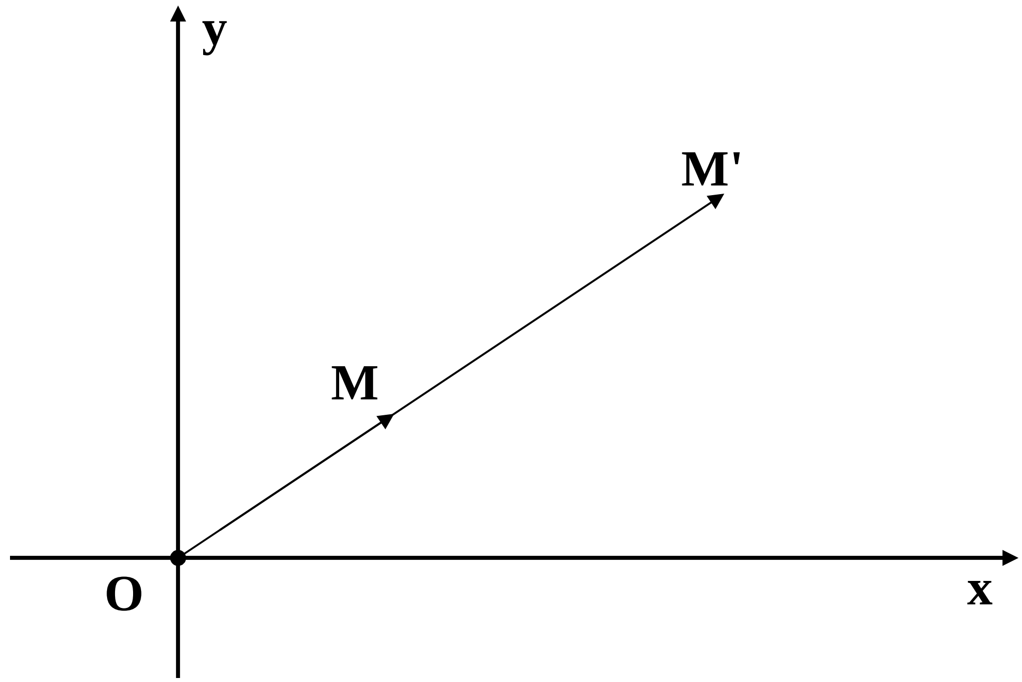
គេបាន $\overrightarrow{OM_1}$ និង $\overrightarrow{OM_2}$ ជាវ៉ិចទ័ររូបភាពនៃ z_1 និង z_2 ។



គេបាន $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM'_2} = \overrightarrow{OM}$

ដូចនេះ រូបភាពនៃ $z_1 - z_2$ គឺជាវ៉ិចទ័រអង្កត់ទ្រូងនៃប្រលេឡូក្រាម $OM_1MM'_2$ ។

ឃ. វិចទ័ររូបភាពនៃផលគុណចំនួនពិត នឹង ចំនួនកុំផ្លិចក្នុងប្លង់កុំផ្លិច :



ឧបមាថា $\mathbf{M}$ និង $\mathbf{M'}$ ជាចំនុចរូបភាពនៃ $\mathbf{z}$ និង $\boldsymbol{\lambda}\mathbf{z}$, $(\lambda > 0)$

រូបភាពនៃ $\boldsymbol{\lambda}.\mathbf{z}$ គឺ $\overrightarrow{\mathbf{OM'}}$ ដែល $\overrightarrow{\mathbf{OM'}} = \lambda\,\overrightarrow{\mathbf{OM}}$ ។

៦_ម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិច

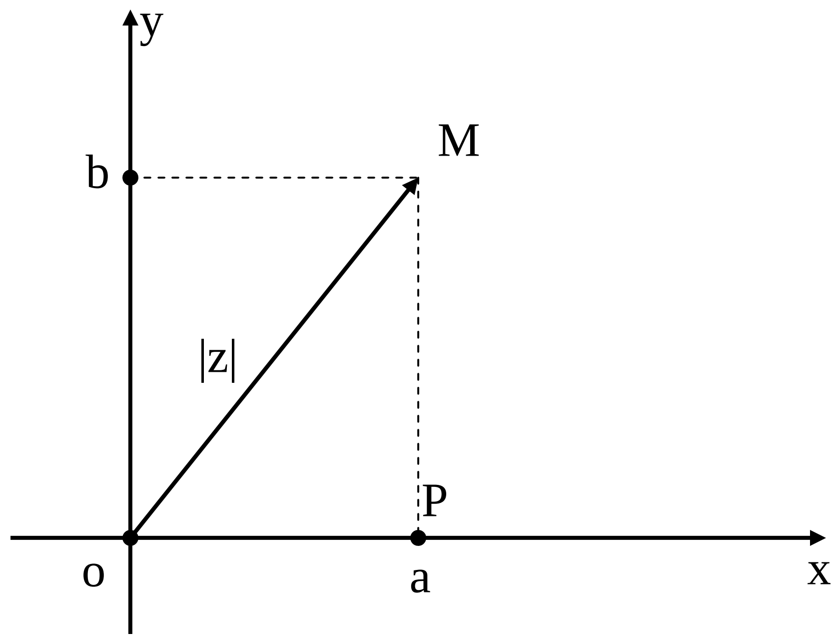
ក. និយមន័យ

ក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ $\mathbf{(xoy)}$ គេយក $\mathbf{M(a,b)}$ ជារូបភាពនៃ $\mathbf{z = a + ib}$ ។

រង្វាស់ $\mathbf{OM}$ ហៅថាម៉ូឌុលនៃ $\mathbf{z = a + ib}$ ។

គេកំណត់តាងម៉ូឌុលនៃ $\mathbf{z = a + ib}$ ដោយ $|\mathbf{z}|$ ឬ $\mathbf{r}$ ដែលអាចគណនាបានតាម

រូបមន្ត $|\mathbf{z}| = \mathbf{r} = \mathbf{OM} = \sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}$ ។



ក្នុងត្រីកោណកែង $\mathbf{OMP}$ គេមាន $\mathbf{OM^2 = MP^2 + OP^2}$

ដោយ $\mathbf{OP = a}$, $\mathbf{MP = b}$

គេបាន $\mathbf{OM^2 = a^2 + b^2}$ ឬ $\mathbf{OM = \sqrt{a^2 + b^2}}$ ។

ដូចនេះ $\mathbf{|z| = OM = \sqrt{a^2 + b^2}}$ ។

ខ. លក្ខណៈ

1. $\mathbf{|z| = |\bar{z}|}$
2. $\mathbf{z.\bar{z} = |z|^2}$
3. $\mathbf{|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|}$
4. $\mathbf{\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}}$
5. $\mathbf{|z^n| = |z|^n}$

គ. វិសមភាពត្រីកោណ

គ្រប់ចំនួនកុំផ្លិច z_1 និង z_2 គេមាន $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$

សម្រាយ :

តាង $z_1=x+iy$ និង $z_2=u+iv$

គេមាន $z_1+z_2=(x+u)+i(y+v)$

គេបាន $|z_1+z_2|=\sqrt{(x+u)^2+(y+v)^2}$

និង $|z_1|+|z_2|=\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{u^2+v^2}$

ដោយ $|z_1+z_2|^2=x^2+y^2+u^2+v^2+2(xu+yv)$

និង $(|z_1|+|z_2|)^2=x^2+y^2+u^2+v^2+2\sqrt{(x^2+y^2)(u^2+v^2)}$

គេបាន :

$$(|z_1|+|z_2|)^2-|z_1+z_2|^2=2\left[\sqrt{(x^2+y^2)(u^2+v^2)}-(xu+yv)\right]$$

កន្សោម $(|z_1|+|z_2|)^2-|z_1+z_2|^2\ge 0$ លុះត្រាតែ

$$(x^2+y^2)(u^2+v^2)-(xu+yv)^2\ge 0$$

$$x^2u^2+x^2v^2+u^2y^2+v^2y^2-x^2u^2-2xyuv-y^2v^2\ge 0$$

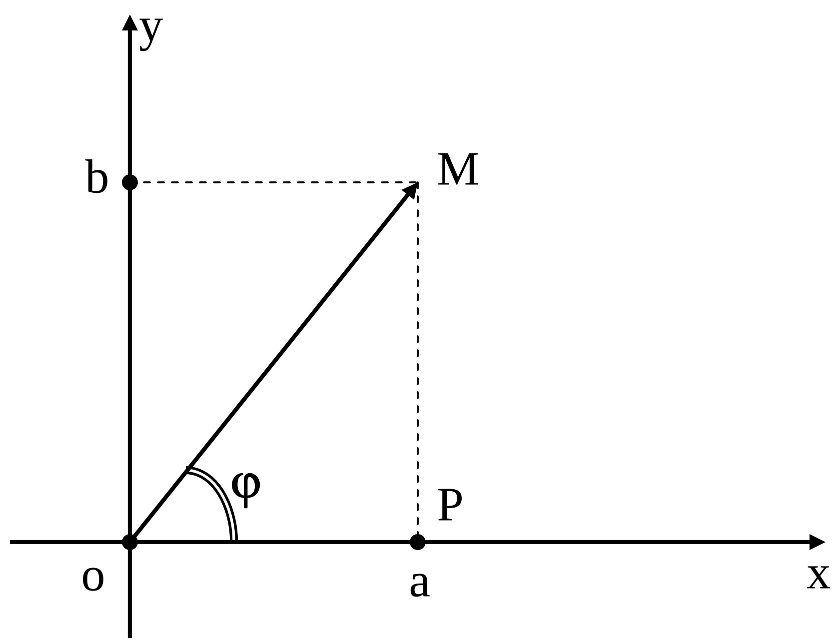
$$x^2v^2-2xyuv+u^2y^2\ge 0$$

$$(xv-uy)^2\ge 0 \text{ ពិត}$$

ដូចនេះ $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$ ។

៧_អាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច

ក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ $\mathbf{(xoy)}$ គេយក $\mathbf{M(a,b)}$ ជារូបភាពនៃ $\mathbf{z = a + ib}$ ។



មុំដែលផ្គុំដោយ $\mathbf{(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})}$ ហៅថាអាគុយម៉ង់នៃ $\mathbf{z = a + i.b}$ ។

គេតាង φ ឬ $\mathbf{Arg(z)}$ ជាអាគុយម៉ង់នៃ $\mathbf{z = a + i.b}$ ។

ក្នុងត្រីកោណកែង $\mathbf{OMP}$ គេមាន :

$\mathbf{r^2 = OM^2 = a^2 + b^2}$ ឬ $\mathbf{r = \sqrt{a^2 + b^2}}$ (ទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ)

$\mathbf{\cos\varphi = \frac{OP}{OM} = \frac{a}{r}}$ និង $\mathbf{\sin\varphi = \frac{MP}{OM} = \frac{b}{r}}$ ។

ដើម្បីរកអាគុយម៉ង់នៃ $\mathbf{z = a + i.b}$ គេដោះស្រាយសមីការ :

$\mathbf{\cos\varphi = \frac{a}{r}}$ និង $\mathbf{\sin\varphi = \frac{b}{r}}$ គេបាន $\mathbf{Arg(z) = \varphi + 2k\pi}$, $\mathbf{k \in Z}$ ។

ឧទាហរណ៏ ១ : រកអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{z=2\sqrt{3}+2i}$

តាមរូបមន្ត $\mathbf{r=|z|\ =\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2}=4}$

$$\mathbf{\cos\varphi=\frac{a}{r}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}}\ \text{និង}\ \mathbf{\sin\varphi=\frac{b}{r}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}}$$

ដូចនេះអាគុយម៉ង់នៃ $\mathbf{z}$ គឺ $\mathbf{Arg(z)=\frac{\pi}{6}+2k\pi\ ;\ k\in Z}$

ឧទាហរណ៏ ២ : រកអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{z=-1+i\sqrt{3}}$

តាមរូបមន្ត $\mathbf{r=|z|\ =\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(-1)^2+(3^)2}=2}$

$$\mathbf{\cos\varphi=\frac{a}{r}=-\frac{1}{2}}\ \text{និង}\ \mathbf{\sin\varphi=\frac{b}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

ដូចនេះអាគុយម៉ង់នៃ $\mathbf{z}$ គឺ $\mathbf{Arg(z)=\frac{2\pi}{3}+2k\pi\ ;\ k\in Z}$

ទាហរណ៏ ៣ : រកអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{z=\sqrt{2}-i\sqrt{2}}$

តាមរូបមន្ត $\mathbf{r=|z|\ =\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2+2}=2}$

$$\mathbf{\cos\varphi=\frac{a}{r}=\frac{\sqrt{2}}{2}}\ \text{និង}\ \mathbf{\sin\varphi=\frac{b}{r}=-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

ដូចនេះអាគុយម៉ង់នៃ $\mathbf{z}$ គឺ $\mathbf{Arg(z)=-\frac{\pi}{4}+2k\pi\ ;\ k\in Z}$

៨-ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច

ចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{z = a + i.b}$ ហៅថាទម្រង់ពីជគណិត ។ គេអាចសរសេរទម្រង់ថ្មីមួយទៀតដូចខាងក្រោម :

គេមាន $\mathbf{r = \sqrt{a^2 + b^2}}$ ហៅថាម៉ូឌុលនៃ $\mathbf{z = a + i.b}$

$\mathbf{\cos\varphi = \frac{a}{r}}$ និង $\mathbf{\sin\varphi = \frac{b}{r}}$ ដែល φ ហៅថាអាគុយម៉ង់នៃ $\mathbf{z}$ ។

គេបាន $\mathbf{z = a + i.b = r(\frac{a}{r} + i.\frac{b}{r}) = r(\cos\varphi + i.\sin\varphi)}$

ដូចនេះ $\mathbf{z = r(\cos\varphi + i.\sin\varphi)}$ ហៅថាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ $\mathbf{z}$ ។

ឧទាហរណ៍ ១ : ចូរសរសេរ $\mathbf{z = 1 + i\sqrt{3}}$ ជារាងត្រីកោណមាត្រ ។

គេមាន $\mathbf{r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2}$

គេបាន $\mathbf{z = 2(\frac{1}{2} + i.\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi}{3})}$ ។

ឧទាហរណ៍ ២ : ចូរសរសេរ $\mathbf{z = -2\sqrt{3} + 2i}$ ជារាងត្រីកោណមាត្រ ។

គេមាន $\mathbf{r = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + (2)^2} = 4}$

គេបាន $\mathbf{z = 4(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i.\frac{1}{2}) = 4(-\cos\frac{\pi}{6} + i.\sin\frac{\pi}{6})}$ ។

$$\mathbf{z = 4[\cos(\pi - \frac{\pi}{6}) + i.\sin(\pi - \frac{\pi}{6})]}$$

$$\mathbf{z = 4(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})}$$

៩. ប្រមាណវិធីលើចំនួនកុំផ្លិចតាមទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ក. ផលគុណចំនួនកុំផ្លិចតាមទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ទ្រឹស្តីបទ :

ឧបមាថាគេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = r_1(\cos\alpha + i.\sin\alpha)$

និង $z_2 = r_2(\cos\beta + i\sin\beta)$ ដែល $r_1 > 0$, $r_2 > 0$

គេបាន $z_1.z_2 = r_1r_2[\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)]$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

គេបាន $z_1z_2 = r_1(\cos\alpha + i.\sin\alpha).r_2(\cos\beta + i\sin\beta)$

$$z_1z_2 = r_1r_2[(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha)$$

ដូចនេះ $z_1.z_2 = r_1r_2[\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)]$ ។

ឧទាហរណ៍

គេឱ្យចំនួនកុំឱ្យផ្លិច

$z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5})$ និង $z_2 = 3(\cos\frac{2\pi}{15} + i\sin\frac{2\pi}{15})$

គណនា $z_1.z_2$

គេបាន $z_1z_2 = 6[\cos(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{15}) + i\sin(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{15})]$

$$= 6(\cos\frac{5\pi}{15} + i\sin\frac{5\pi}{15}) = 6(\cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi}{3})$$

ដូចនេះ $z_1z_2 = 6(\cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi}{3})$ ។

ខ. ផលគុណចែកចំនួនកុំផ្លិចតាមទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ទ្រឹស្តីបទ :

ឧបមាថាគេមានចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{z_1 = r_1(\cos\alpha + i.\sin\alpha)}$

និង $\mathbf{z_2 = r_2(\cos\beta + i\sin\beta)}$ ដែល $\mathbf{r_1 > 0}$, $\mathbf{r_2 > 0}$

គេបាន $\mathbf{\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)]}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

គេបាន $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}.\dfrac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\beta + i\sin\beta}$

$$= \frac{r_1}{r_2}.\frac{(\cos\alpha + i.\sin\alpha)(\cos\beta - i\sin\beta)}{(\cos\beta + i\sin\beta)(\cos\beta - i\sin\beta)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}.\frac{(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha)}{\cos^2\beta + \sin^2\beta}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)\right]$$

ដូចនេះ $\mathbf{\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)]}$ ។

គ. ស្វ័យគុណទី $\mathbf{n}$ នៃចំនួនកុំផ្លិចតាមទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ :

ទ្រឹស្តីបទ : គ្រប់ចំនួនពិត $\mathbf{\varphi}$ និង $\mathbf{r > 0}$ គេបាន :

$$\mathbf{z^n = [r(\cos\varphi + i.\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i.\sin n\varphi)}$$

ដែល $\mathbf{n}$ ជាចំនួនគត់រឺឡាទីហ្វ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ :

រាមរូបមន្ត $z_1.z_2 = r_1r_2[\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)]$

គេបានជាបន្តបន្ទាប់ដូចខាងក្រោម :

$$z^2 = z.z = r.r[\cos(\varphi+\varphi)+i\sin(\varphi+\varphi)] = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$$

$$z^3 = z^2.z = r^2.r[\cos(2\varphi+\varphi)+i\sin(2\varphi+\varphi)]$$

$$= r^3(\cos 3\varphi + i.\sin 3\varphi)$$

ឧបមាថា $z^n = r^n(\cos n\varphi + i.\sin n\varphi)$ ពិត

គេបាន $z^{n+1} = z^n.z = r^n.r[\cos(n\varphi+\varphi)+i\sin(n\varphi+\varphi)]$

$= r^{n+1}[\cos(n+1)\varphi + i\sin(n+1)\varphi]$ ពិត

ដូចនេះ $z^n = r^n(\cos n\varphi + i.\sin n\varphi)$ ។

ឃ. រូបមន្តដឺម័រ

គេមាន $z^n = [r(\cos\varphi + i.\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i.\sin n\varphi)$

គេបាន $r^n(\cos\varphi + i.\sin\varphi)^n = r^n(\cos n\varphi + i.\sin n\varphi)$

ដូចនេះ $(\cos\varphi + i.\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i.\sin n\varphi$

(ហៅថារូបមន្តដឺម័រ) ។

ឧទាហរណ៍ ៖ គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=\cos\frac{4\pi}{9}+i.\sin\frac{4\pi}{9}$

ចូរសរសេរ $w=\frac{z^2}{1+z^3}$ ជារាងត្រីកោណមាត្រ ។

តាមរូបមន្តដឺម័រគេមាន $z^2=(\cos\frac{4\pi}{9}+i\sin\frac{4\pi}{9})^2=\cos\frac{8\pi}{9}+i\sin\frac{8\pi}{9}$

និង $z^3=(\cos\frac{4\pi}{9}+i\sin\frac{4\pi}{9})^3=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$

គេបាន $w=\dfrac{\cos\frac{8\pi}{9}+i.\sin\frac{8\pi}{9}}{1+\cos\frac{4\pi}{3}+i.\sin\frac{4\pi}{3}}$

$$=\dfrac{\cos\frac{8\pi}{9}+i.\sin\frac{8\pi}{9}}{2\cos^2\frac{2\pi}{3}+2i\sin\frac{2\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{3}}$$

$$=\frac{1}{2\cos\frac{2\pi}{3}}\cdot\dfrac{\cos\frac{8\pi}{9}+i.\sin\frac{8\pi}{9}}{\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}}$$

$$=-[\cos(\frac{8\pi}{9}-\frac{2\pi}{3})+i\sin(\frac{8\pi}{9}-\frac{2\pi}{3})]$$

$$=-(\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9})=\cos\frac{11\pi}{9}+i\sin\frac{11\pi}{9}$$

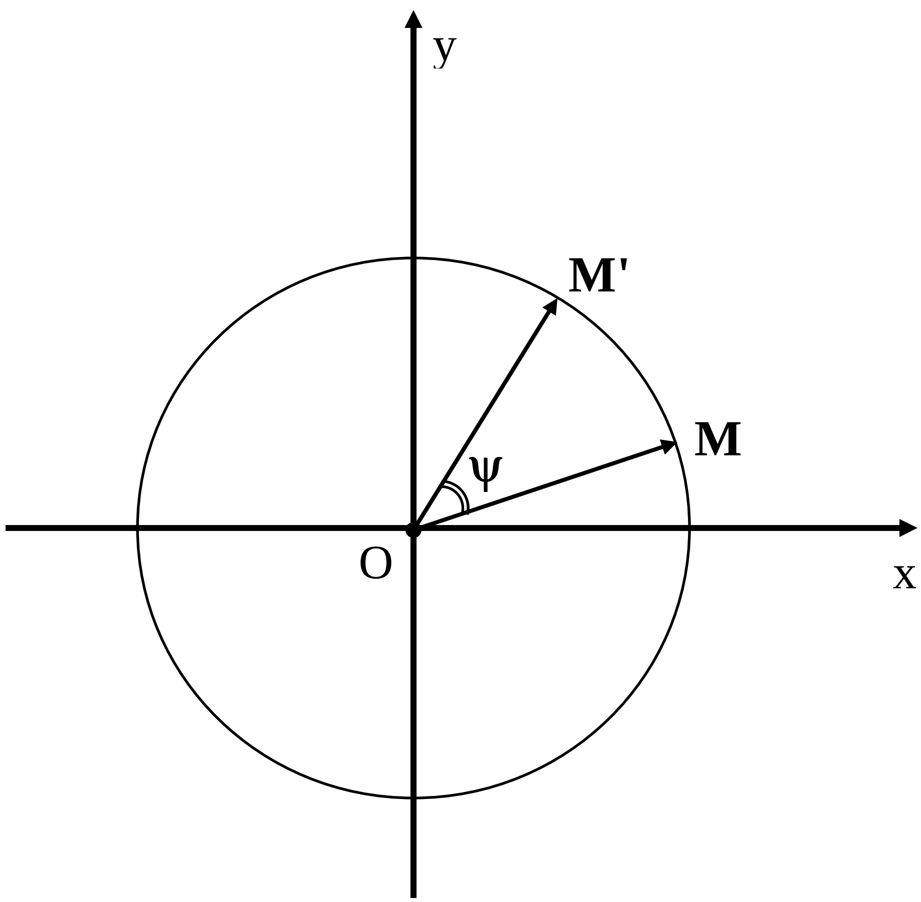
ដូចនេះ $w=\cos\frac{11\pi}{9}+i.\sin\frac{11\pi}{9}$ ។

១០-បំលែងវិលជុំវិញគល់តម្រុយនៃប្លង់កុំផ្លិច

គេមានចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{w=\cos\psi+i.\sin\psi}$ ។

បើ $\mathbf{M'(z')}$ ជារូបភាពនៃ $\mathbf{M(z)}$ តាមបម្លែងវិលផ្ចិត $\mathbf{O}$ និង មុំ ψ នោះ

គេបាន $\mathbf{z'=w.z=(\cos\psi+i\sin\psi).z}$ ។



ឧទាហរណ៏ ១ : នៅក្នុងប្លង់កុំផ្លិច $\mathbf{(xoy)}$ គេឱ្យ $\mathbf{M}$ ជាចំនុចរូបភាពនៃ $\mathbf{z=\sqrt{3}+i}$ ។

ចូរកំណត់ $\mathbf{z'}$ ដោយដឹងថា $\mathbf{M'(z')}$ ជារូបភាពនៃ $\mathbf{M}$ តាមបម្លែងវិលផ្ចិត $\mathbf{O}$

និងមុំ $\psi=\dfrac{\pi}{12}$ ។

បើ $M'(z')$ ជារូបភាពនៃ $M(z)$ តាមបម្លែងវិលផ្ចិត O និងមុំ $\psi = \frac{\pi}{12}$ នោះគេបាន

$z' = (\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})z$

ដោយ $z = \sqrt{3} + i = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + i.\frac{1}{2}) = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i.\sin\frac{\pi}{6})$

គេបាន $z' = 2[\cos(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6})]$

ដូចនេះ $z' = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$ ។

ឧទាហរណ៍ ២ : នៅក្នុងប្លង់កុំផ្លិច (xoy) គេឱ្យ M ជាចំនុចរូបភាពនៃ $z = 1 - i\sqrt{3}$ ។

ចូរកំណត់ z' ដោយដឹងថា $M'(z')$ ជារូបភាពនៃ M តាមបម្លែងវិលផ្ចិត O

និងមុំ $\psi = \frac{2\pi}{3}$ ។

បើ $M'(z')$ ជារូបភាពនៃ $M(z)$ តាមបម្លែងវិលផ្ចិត O និងមុំ $\psi = \frac{2\pi}{3}$ នោះគេបាន

$z' = (\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})z$

ដោយ $z = 1 - i\sqrt{3} = 2(\frac{1}{2} - i.\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2[\cos(-\frac{\pi}{3}) + i.\sin(-\frac{\pi}{3})]$

គេបាន $z' = 2[\cos(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3})]$

ដូចនេះ $z' = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$ ។

១១-ឫសទី n នៃចំនួនកុំផ្លិចតាមទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ឧបមាថាគេមានចំនួនកុំផ្លិច $z = r(\cos\psi + i\sin\psi)$

តាង $w = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ជាឫសទី n នៃ z នោះ $w^n = z$

គេបាន $\rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r(\cos\psi + i\sin\psi)$

គេទាញ $\begin{cases}\rho^n = r \\ \cos(n\varphi) = \cos\psi \\ \sin(n\varphi) = \sin\psi\end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases}\rho = \sqrt[n]{r} \\ \varphi = \dfrac{\psi + 2k\pi}{n}\end{cases}$

ដូចនេះឫសទី n នៃ z កំណត់ដោយ :

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\psi + 2k\pi}{n}\right) + i.\sin\left(\frac{\psi + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

ដែល $k = 0, 1, 2, ..., n-1$ ។

ឧទាហរណ៍ : គណនាឫសទីបីនៃ $z = 4\sqrt{2} + i.4\sqrt{2}$

គេមាន $z = 4\sqrt{2} + i.4\sqrt{2} = 8(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = 8(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

គេទាញ $r = 8$, $\psi = \dfrac{\pi}{4}$ ។ តាមរូបមន្តឫសទី 3 នៃ z កំណត់ដោយ :

$$w_k = 2\left[\cos\left(\frac{\pi + 8k\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 8k\pi}{12}\right)\right], k = 0, 1, 2$$ ។

ដូចនេះ $w_0 = 2(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}); w_1 = 2(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$

និង $w_2 = 2(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12})$ ។

១២-ទម្រង់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនៃចំនួនកុំផ្លិច

ក. រូបមន្តអឺលែ (Euler's formula)

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $\mathbf{x}$ គេបាន $\mathbf{e^{ix}=\cos x+i\sin x}$

ដែល $\mathbf{e=2.71828...}$ ជាគោលលោការីតនេពែ ។

រូបមន្តអឺលែនេះនៅតែពិតចំពោះ $\mathbf{x}$ ជាចំនួនកុំផ្លិចក៏ដោយ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

-ស្រាយបញ្ជាក់ដោយប្រើដេរីវេ :

តាងអនុគមន៍ $\mathbf{f}$ (អាចជាអនុគមន៍កុំផ្លិច) នៃអថេរ $\mathbf{x}$ កំណត់ដោយ

$$\mathbf{f(x)=\frac{\cos x+i\sin x}{e^{ix}}}$$

គេបាន $\mathbf{f'(x)=\frac{(-\sin x+i\cos x)e^{ix}-ie^{ix}(\cos x+i\sin x)}{e^{2ix}}}$

$$\mathbf{=\frac{e^{ix}(-\sin x+i\cos x-i\cos x-i^2\sin x)}{e^{2ix}}}$$

$$\mathbf{=\frac{-\sin x+i\cos x-i\cos x+\sin x}{e^{ix}}=\frac{0}{e^{ix}}=0}$$

នាំឱ្យ $\mathbf{f(x)}$ ជាអនុគមន៍ថេរគ្រប់ $\mathbf{x}$ ។

គេបាន $\mathbf{f(x)=f(0)=\frac{\cos 0+i\sin 0}{e^0}=1}$ ឬ $\mathbf{f(x)=\frac{\cos x+i\sin x}{e^{ix}}=1}$

ដូចនេះ $\mathbf{e^{ix}=\cos x+i\sin x}$ ។

-ស្រាយបញ្ជាក់ដោយប្រើសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទីមួយ :

គេតាងអនុគមន៍ $g(x)=\cos x+i.\sin x$

គេមាន $g'(x)=-\sin x+i\cos x$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង i គេបាន $i.g'(x)=-i\sin x-csox$

គេបាន $g(x)+ig'(x)=0$ ឬ $g'(x)-i.g(x)=0$

ជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ I ។

គេបានចម្លើយទូទៅនៃសមីការនេះគឺ $g(x)=k\,e^{ix}$

បើ $x=0$ នោះ $g(0)=k$ តែ $g(0)=\cos 0+i.\sin 0=1$

នោះ $k=1$ ហើយគេបាន $g(x)=e^{ix}$ ។

ដូចនេះ $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ ។

-ស្រាយបញ្ជាក់ដោយប្រើសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទីពីរ :

ជ្រើសរើសអនុគមន៍ $h(x)=e^{ix}$

គេមាន $h'(x)=i.e^{ix}$ និង $h''(x)=i^2e^{ix}=-e^{ix}$

គេបាន $h''(x)+h(x)=-e^{ix}+e^{ix}=0$ ជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែអូម៉ូសែនលំដាប់ទីពីរ ។

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ពីរនេះមានចម្លើយលីនេអ៊ែឯករាជ្យលីនេអ៊ែចំនួនពីរដែលផ្ទៀងផ្ទាត់វាគឺ $h_1(x)=\cos x$ និង $h_2(x)=\sin x$ ។ បន្សំលីនេអ៊ែនៃចម្លើយចំពោះសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលអូម៉ូសែន ក៏ជាចម្លើយមួយផងដែរ ។

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ $\mathbf{h(x) = A\cos x + B\sin x}$

ដែល $\mathbf{A}$ និង $\mathbf{B}$ ជាពីរចំនួនថេរដែលអាចរកបានតាម $\mathbf{h(0) = A = e^{i0} = 1}$

និង $\mathbf{h'(0) = B = ie^{i0} = i}$ ព្រោះ $\mathbf{h'(x) = -A\sin x + B\cos x}$ ។

ហេតុនេះគេបាន $\mathbf{h(x) = \cos x + i\sin x}$ ។

ដូចនេះ $\mathbf{e^{ix} = \cos x + i\sin x}$ ។

-ស្រាយបញ្ជាក់ដោយប្រើសេរីតៃល័រ:

រូបមន្តស៊េរីតៃល័រចំពោះអនុគមន៍បី $\mathbf{e^x}$, $\mathbf{\cos x}$ និង $\mathbf{\sin x}$ គឺ :

$$\mathbf{e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...}$$

$$\mathbf{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ...}$$

$$\mathbf{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ...}$$

ដោយជំនួស $\mathbf{x}$ ដោយ $\mathbf{ix}$ ក្នុងស៊េទាំងបីនេះគេទាញបាន $\mathbf{e^{ix} = \cos x + i\sin x}$ ។

ខ. ទម្រង់អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

គ្រប់ចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{z = a + i.b}$ ដែល $\mathbf{a , b}$ ជាចំនួនពិតអាចសរសេរជាទម្រង់មួយថ្មីទៀត

គឺ $\mathbf{z = r\,e^{i\theta}}$ ដែល $\mathbf{r = \sqrt{a^2 + b^2}}$, $\mathbf{\cos\theta = \frac{a}{r} , \sin\theta = \frac{b}{r}}$ ។

ទម្រង់ $\mathbf{z = r\,e^{i\theta}}$ ហៅថាទម្រង់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនៃ $\mathbf{z = a + i.b}$ ។

គ. ទំនាក់ទំនងជាមួយអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ :

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $\mathbf{x}$ គេមាន $\mathbf{e^{ix} = \cos x + i\sin x \ (1)}$

ជំនួស $\mathbf{x}$ ដោយ $\mathbf{-x}$ គេបាន $\mathbf{e^{-ix} = \cos x - i\sin x \ (2)}$

បូកសមីការ $\mathbf{(1)}$ និង $\mathbf{(2)}$ គេទាញបាន $\mathbf{e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x}$

គេទាញ $\mathbf{\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}}$ ។

ដកសមីការ $\mathbf{(1)}$ និង $\mathbf{(2)}$ គេទាញបាន $\mathbf{e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin x}$

គេទាញ $\mathbf{\sin x = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}}$ ។

ដូចនេះ $\mathbf{\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \ ; \ \sin x = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}}$ ។

(រូបមន្តនេះពិតផងដែរចំពោះ $\mathbf{x}$ ជាចំនួនកុំផ្លិច)

ឃ. ទំនាក់ទំនងជាមួយអនុគមន៍អ៊ីពែបូលិក:

គេមាន $\mathbf{\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \ ; \ \sin x = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}}$

ជំនួស $\mathbf{x}$ ដោយ $\mathbf{i.x}$ គេបាន :

$\mathbf{\cos(ix) = \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2} = \cosh x}$ និង $\mathbf{\sin(ix) = i\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2} = i\sinh x}$

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $\mathbf{\cosh x = \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}}$ និង $\mathbf{\sinh x = \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}}$ គេបាន :

$\mathbf{\cosh(ix) = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \cos x \ , \ \sinh(ix) = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2} = i\sin x}$ ។

ឧទាហរណ៍១ : សរសេរ $z = 2 + 2i\sqrt{3}$ ជាទម្រង់អុិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ?

គេមាន $r = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$

គេបាន $z = 4(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 4(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$ ។

ឧទាហរណ៍២: សរសេរ $z = 1 + e^{i\frac{\pi}{4}}$ ជារាងអិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ?

គេមាន $z = 1 + e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{8}}(e^{-i\frac{\pi}{8}} + e^{i\frac{\pi}{8}})$ ដោយ $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{e^{i\frac{\pi}{8}} + e^{-i\frac{\pi}{8}}}{2}$

ដូចនេះ $z = 2\cos\frac{\pi}{8}.e^{i\frac{\pi}{8}}$ ។

ឧទាហរណ៍៣: គណនា i^i ?

គេមាន $i = \cos\frac{\pi}{2} + i.\sin\frac{\pi}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

គេបាន $i^i = \left(e^{\frac{i\pi}{2}}\right)^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$ ។

ឧទាហរណ៍៤: ដោះស្រាយសមីការ $\cos x = 2$ ក្នុងសំណុំកុំផ្លិច ?

តាមរូបមន្តអឺលែគេមាន $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

គេបាន $\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = 2$ ឬ $e^{2ix} - 4e^{ix} + 1 = 0$ តាង $t = e^{ix}$

គេបានសមីការ $t^2 - 4t + 1 = 0$

$\Delta' = 4 - 1 = 3$ គេទាញឫស $t_1 = 2 - \sqrt{3}$; $t_2 = 2 + \sqrt{3}$

ចំពោះ $t = 2 - \sqrt{3}$ គេបាន $e^{ix} = 2 - \sqrt{3}$ នោះ $ix = \ln(2 - \sqrt{3})$

ឬ $x = -i\ln(2 - \sqrt{3})$ ។

ចំពោះ $t = 2 + \sqrt{3}$ គេបាន $e^{ix} = 2 + \sqrt{3}$ នោះ $ix = \ln(2 + \sqrt{3})$

ឬ $x = -i\ln(2 + \sqrt{3})$ ។

ឧទាហរណ៏៥: ដោះស្រាយសមីការ $\sin x = -3$ ក្នុងសំណុំកុំផ្លិច ?

តាមរូបមន្តអឺលែគេមាន $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

គេបាន $\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = -3$ ឬ $e^{2ix} + 6e^{ix} - 1 = 0$ តាង $t = e^{ix}$

គេបានសមីការ $t^2 + 6t - 1 = 0$, $\Delta' = 9 + 1 = 10$

មានឫស $t_1 = -3 + \sqrt{10}$, $t_2 = -3 - \sqrt{10}$ ។

-ចំពោះ $t = -3 + \sqrt{10}$ គេបាន $e^{ix} = -3 + \sqrt{10}$ នោះ $x = -i\ln(-3 + \sqrt{10})$

-ចំពោះ $t = -3 - \sqrt{10} = -(3 + \sqrt{10})$

គេបាន $e^{ix} = -(3 + \sqrt{10}) = (3 + \sqrt{10})e^{i\pi} = e^{i\pi + \ln(3+\sqrt{10})}$

គេទាញ $ix = i\pi + \ln(3 + \sqrt{10})$ ឬ $x = \pi - i\ln(3 + \sqrt{10})$ ។

ដូចនេះ $x = -i\ln(-3 + \sqrt{10})$, $x = \pi - i\ln(3 + \sqrt{10})$ ។

១៣~ប្រមាណវិធីចំនួនកុំផ្លិចតាមទម្រង់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

ក. ប្រមាណវិធីគុណចំនួនកុំផ្លិចតាមទម្រង់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

គេមានចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{z = r\,e^{i\varphi}}$ និង $\mathbf{w = \rho\, e^{i\psi}}$

ដែល $\mathbf{r > 0\ ;\ \rho > 0}$ ហើយ $\varphi\ ,\ \psi$ ជាចំនួនពិត ។

គេបាន $\mathbf{z.w = r.\rho\, e^{i(\varphi+\psi)}}$ ។

ខ. ប្រមាណវិធីចែកចំនួនកុំផ្លិចតាមទម្រង់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

គេមានចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{z = r\,e^{i\varphi}}$ និង $\mathbf{w = \rho\, e^{i\psi}}$

ដែល $\mathbf{r > 0\ ;\ \rho > 0}$ ហើយ $\varphi\ ,\ \psi$ ជាចំនួនពិត ។

គេបាន $\mathbf{\frac{z}{w} = \frac{r}{\rho} e^{i(\varphi-\psi)}}$ ។

គ. ស្វ័យគុណចំនួនកុំផ្លិចតាមទម្រង់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

គេមានចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{z = r\,e^{i\varphi}}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឡាទីហ្វ $\mathbf{n}$ គេបាន :

$\mathbf{z^n = \left(r\,e^{i\varphi}\right)^n = r^n\, e^{in\varphi}}$ ។

ឧទាហរណ៍ : គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}}$ និង $\mathbf{w = 3e^{i\frac{\pi}{12}}}$ ។

គណនា $\mathbf{z.w}$ និង $\mathbf{\frac{z}{w}}$

គេបាន $\mathbf{z.w = 6\,e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12})} = 6e^{i\frac{\pi}{4}}}$ និង $\mathbf{\frac{z}{w} = \frac{2}{3}e^{i(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{12})} = \frac{2}{3}e^{i\frac{\pi}{12}}}$

១៤-អនុវត្តន៍ចំនួនកុំផ្លិចក្នុងត្រីកោណមាត្រ

ក. រូបមន្តមុំឌុប

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $\mathbf{x}$ គេមាន $\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$; $\sin x = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

គេបាន $\cos^2 x = \left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 = \dfrac{e^{2ix}+e^{-2ix}+2}{4}$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}.\frac{e^{2ix}+e^{-i2x}}{2}+\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}$$

គេទាញ $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ ។

ហើយ $\sin 2x = \dfrac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i} = 2.\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

ដូចនេះ $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ ។

ខ. រូបមន្តមុំទ្រីប

គេមាន $\cos^3 x = \left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3$

$$= \frac{e^{3ix}+e^{-3ix}+3(e^{ix}+e^{-ix})}{8}$$

$$= \frac{2\cos 3x + 6\cos x}{8} = \frac{\cos 3x + 3\cos x}{4}$$

គេទាញបាន $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ ។

ហើយ $\sin^3 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3$

$$= \frac{(e^{3ix} - e^{-3ix}) - 3(e^{ix} - e^{-ix})}{-8i}$$

$$= \frac{2i\sin 3x - 6i\sin x}{-8i}$$

$$= \frac{\sin 3x - 3\sin x}{-4}$$

គេទាញបាន $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ ។

គ. រូបមន្តផលបូក និង ផលដកនៃមុំពីរ

គេមាន $e^{i(a+b)} = e^{ia}.e^{ib}$ គ្រប់ចំនួនពិត a និង b

ដោយ $e^{ia}.e^{ib} = (\cos a + i\sin a)(\cos b + i\sin b)$

$$e^{ia}e^{ib} = (\cos a\cos b - \sin a\sin b) + i(\sin a\cos b + \sin b\cos a)$$

ហើយ $e^{i(a+b)} = \cos(a+b) + i\sin(a+b)$

ដូចនេះ $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$

និង $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $e^{i(a-b)} = e^{ia}.e^{-ib}$ គ្រប់ចំនួនពិត a និង b

ដោយ $e^{ia}.e^{-ib} = (\cos a + i\sin a)(\cos b - i\sin b)$

$$e^{ia}e^{-ib} = (\cos a\cos b + \sin a\sin b) + i(\sin a\cos b - \sin b\cos a)$$

ហើយ $e^{i(a-b)} = \cos(a-b) + i\sin(a-b)$

ដូចនេះ $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$

និង $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a$ ។

ឃ. រូបមន្តបំលែងពីផលគុណទៅផលបូក

$$\cos a\cos b=\frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2}.\frac{e^{ib}+e^{-ib}}{2}$$

$$=\frac{e^{i(a+b)}+e^{i(a-b)}+e^{-i(a-b)}+e^{-i(a+b)}}{4}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{e^{i(a+b)}+e^{-i(a+b)}}{2}+\frac{e^{i(a-b)}+e^{-i(a-b)}}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]$$

ដូចនេះ $\cos a\cos b=\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]$

$$\sin a\sin b=\frac{e^{ia}-e^{-ia}}{2i}.\frac{e^{ib}-e^{-ib}}{2i}$$

$$=\frac{e^{i(a+b)}-e^{i(a-b)}-e^{-i(a-b)}+e^{-i(a+b)}}{4i^2}$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{e^{i(a+b)}+e^{-i(a+b)}}{2}-\frac{e^{i(a-b)}+e^{-i(a-b)}}{2}\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)-\cos(a-b)\right]$$

ដូចនេះ $\sin a\sin b=\frac{1}{2}\left[\cos(a-b)+\cos(a+b)\right]$

១៥~អនុវត្តន៍ចំនួនកុំផ្លិចក្នុងស្វ៊ីតចំនួនពិត

ចំពោះស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (a_n) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងកំណើន :

$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ ដែល p , q ជាចំនួនពិត

សមីការសម្គាល់របស់ស្វ៊ីតនេះគឺ $z^2 + pz + q = 0$

ក្នុងករណី $\Delta = p^2 - 4q < 0$ សមីការមានឫសពីរជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នា

គឺ z_1 និង z_2 ។ ក្នុងករណីនេះដើម្បីគណនា a_n គេត្រូវអនុវត្តន៍ដូចតទៅ :

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $z_n = a_{n+1} - z_1 a_n$ រួចស្រាយថា (z_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិចមួយ ។

គណនា z_n រួចទាញរក a_n ។

ឧទាហរណ៍ គេមានស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (a_n) កំណត់ដោយ :

$a_0 = 0$, $a_1 = 1$ និង $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$

ចូរគណនា a_n ជាអនុគមន៍នៃ n

១៦~អនុវត្តន៍ចំនួនកុំផ្លិចក្នុងធរណីមាត្រ

ក. ចម្ងាយរវាងពីរចំនុច

ខ. ចំនុចចែកអង្កត់តាមផលធៀបមួយ

គ. ផលធៀបជ្រុង និង មុំនៃត្រីកោណក្នុងប្លង់

ឃ. សំណុំចំណុចក្នុងប្លង់កុំផ្លិច